1 Вычислительная геометрия

1.1 Определение многоугольника

Многоугольник — это часть плоскости, ограниченная конечной совокупностью отрезков, образующих простую замкнутую кривую.

Напомним, что *простая замкнутая кривая* — это кривая гомеоморфная окружности.

Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ — точки на плоскости, т.е. $v_i = (x_i, y_i)$). Мы будем считать, что сложение в индексах этих точек происходит по модулю n, т.е. $v_{(n-1)+1} = v_n = v_0$. Обозначим отрезок между v_i и v_{i+1} через e_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$: $e_0 = v_0v_1, e_1 = v_1, v_2, \ldots, e_{n-1} = v_{n-1}v_0$. Назовем отрезки e_i и e_{i+1} соседним.

Мы скажем, что отрезки $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ образуют *границу многоугольника*, если выполнены следующие условия:

1) соседние отрезки имеют лишь одну общую точку, т.е. $e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1}$ для всех $0 \le i \le n-1$.

2) несоседние отрезки не пересекаются: $e_i \cap e_j = \emptyset$ при $j \ne i+1$ и $i \ne j+1$.

Точки v_i называются вершинами многоугольника, а отрезки e_i — его ребрами.

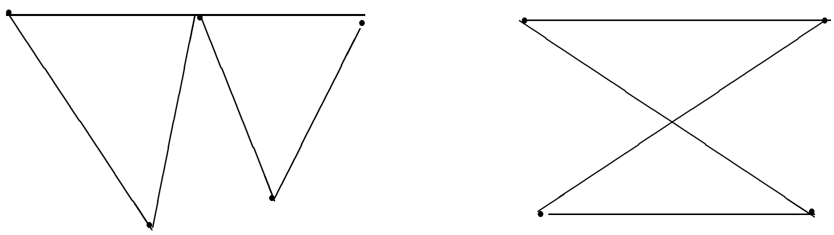

Рис. 1. Примеры не многоугольников

Отрезки на этом рисунке не образуют границы многоугольников (почему?).

Теорема Жордана. *Всякая простая замкнутая кривая разбивает плоскость на 2 связные области: внешность и внутренность кривой.*

Таким образом, многоугольник P — это внутренность его границы ∂P. Мы будем включать точки границы в многоугольник, т.е. считать, что $\partial P \subset P$.

1.2 Задача об охране галереи

Определение 1. *Пусть точки x и y принадлежат многоугольнику P. Мы скажем, что из x* ясно видна *y , если $xy \subset P$ и $xy \cap \partial P \subseteq \{x, y\}$. Из x* видна *y , если $xy \subset P$.*

Задача об охране галереи формулируется следующим образом: *найти наименьшее число охранников, достаточное для охраны любого многоугольника с n вершинами.* Более формально, охранник это точка. Множество охранников достаточно для охраны многоугольника, если из соответствующих точек видны все точки этого многоугольника.

Обозначим через $G(n)$ функцию, задающую ответ задачи. Нетрудно понять, что $1 \le G(n) \le n$ (почему верна верхняя оценка?). В 1975 г. Хватал (Chvátal) построил пример, показывающий, что $G(n) \ge [n/3]$.

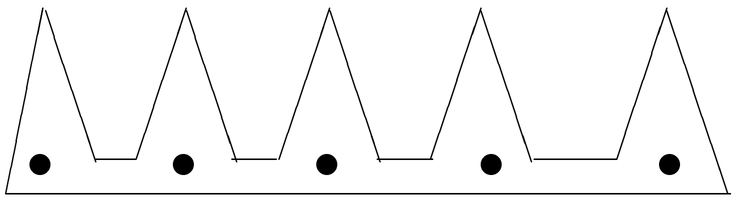

Рис. 2. "Гребень"Хватала (n=15)

На этом рисунке приведен его пример при $n = 15$. Точками указаны возможные места размещения 5 охранников. Очевидно, что меньшим числом охранников для этого многоугольника не обойтись. В общем случае, такой "гребень"с n зубьями требует n охранников и имеет $3n$ вершин.

Определение 2. Диагональю *многоугольника P называется отрезок, соединяющий две вершины этого многоугольника, ясно видимые друг из друга.*

Мы скажем, что две диагонали ab и cd не пересекаются, если $ab \cap cd \subseteq \{a, b, c, d\}$.

Триангуляцией *многоугольника P называется его разбиение на треугольники непересекающимися диагоналями.*

Верхняя оценка $G(n)$, совпадающая с нижней, получается как следствие трех утверждений.
Утверждение 1. *Каждый многоугольник имеет триангуляцию.*

Пусть дан многоугольник P с триангуляцией T. Определим граф $G = G(P,T) = (V, E)$:
$V = \{$множество вершин $P\}$, $E = T \cup \partial P$.

Утверждение 2. *Вершины графа G можно раскрасить в 3 цвета так, что соседние вершины будут окрашены в разные цвета.*
Утверждение 3. *Число охранников, достаточное для охраны P $\leq$ число вершин одного цвета в G .*

Теорема 1. *Для любого $n \geq 3$*

$$G(n) = [n/3]$$

Доказательство верхней оценки немедленно следует из утверждений 2 и 3, так как хотя бы для одного из трех цветов число вершин, окрашаенных в этот цвет $\leq [n/3]$.

Для доказательства утверждений 1-3 потребуются некоторые вспомогательные понятия и утверждения.

Определение 3. *Вершина v многоугольника P называется* рефлексивной*, если ее внутренний угол $> \pi$, в противном случае, вершина называется* выпуклой*. Если внутренний угол вершины $< \pi$, то она называется* строго выпуклой

Лемма 1. *Каждый многоугольник имеет хоть одну строго выпуклую вершину.*

Лемма 2. *Каждый многоугольник с $n \geq 4$ вершинами имеет хоть одну диагональ.*

Теорема 2. *(О существовании триангуляции) Каждый многоугольник можно разбить на треугольники добавлением диагоналей.*

Доказательство получается индукцией по числу вершин многоугольника с использованием леммы 2.

Лемма 3. *Всякая триангуляция многоугольника с n вершинами имеет $(n-3)$ диагонали и состоит из $(n-2)$ треугольников.*

Доказательство индукцией по числу n вершин многоугольника.

Следствие. Сумма внутренних углов многоугольника с n вершинами равна $(n-2)\pi$.

Определение 4. *Дуальный граф D_T для триангуляции T многоугольника P — это граф, вершинами которого служат треугольники триангуляции, а ребра соединяют вершины, соответствующие треугольникам с общей диагональю.*

Лемма 4. *Дуальный граф D_T — это (неориентированное) дерево со степенями всех вершин ≤ 3.*

Отметим, что вершины степени 1 в D_T — это листья, вершины степени 2 лежат на ветвях, вершины степени 3 — точки ветвления.

Определение 5. *Три подряд идущие вершины a, b, c многоугольника P образуют ухо, если отрезок ac является диагональю. В этом случае вершина b называется кончиком уха.*

Теорема 3. *(Мейстер о существовании 2-х ушей) Каждый многоугольник с $n \geq 4$ вершинами имеет по крайней мере 2 непересекающихся уха.*

Доказательство. Действительно, в дереве D_T каждый лист соответствует уху. А количество листьев в любом дереве с $n \geq 2$ вершинами не меньше 2-х.

Теорема 4. *Пусть T — это произвольная триангуляция многоугольника P. Тогда Вершины графа $G = G(P,T)$ можно раскрасить в 3 цвета так, что соседние вершины будут окрашены в разные цвета.*

Доказательство индукцией по числу n вершин P. При $n \geq 4$ можно по теореме 3 выделить ухо abc и раскрасить граф без вершины b, а затем выбрать для нее цвет, отличный от цветов a и c.