1 Предварительные сведения

1.1 Множества

Под множеством понимается некоторая совокупность элементов. Через $\in$ обозначается *отношение принадлежности*, т.е. $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A. $A \subseteq B$ означает, что каждый элемент A является также элементом B. В этом случае множество A называется *подмножеством* множества B. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$, т.е. множества A и B равны. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* множества B и в этом случае пишем $A \subset B$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. *Семейство всех подмножеств множества* A обозначается через 2^A.

1.1.1 Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \textit{или} \ x \in B\}.$$

Объединением семейства множеств A_i $(i \in I)$ и B называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \ \textit{существует такое} \ i_0 \in I, \quad \textit{что}\ x \in A_{i_0}\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \textit{и} \ x \in B\}.$$

Пересечением семейства множеств A_i $(i \in I)$ и B называется множество

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \ \textit{для всякого} \ i \in I \ \ x \in A_i\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \textit{и} \ x \notin B\}.$$

Обычно все рассматриваемые множества являются подмножествами некторого "универсального"множества U. Разность $U \setminus A$ называется *дополнением множества* A (в U) и обозначается через $\bar{A}$. Ясно, что $A \cup \bar{A} = U$.
Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Иногда симметрическую разность множеств называют *дизъюнктивной суммой* и обозначают $A \oplus B$ или $A \nabla B$.

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ называется множество n-ок

$$A_1 \times \ldots A_n = \{< a_1, \ldots, a_n > \ \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = \ldots = A_n = A$, то $A_1 \times \ldots A_n$ называется *декартовой (прямой) степенью* множества A и обозначается через A^n.

Пусть $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — это множество всех натуральных (т.е. целых неотрицательных) чисел, $n \in N$, $m \in N$ и $n < m$, пусть $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, $B = \{0, 1, \ldots m\}$. Тогда $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{n+1, \ldots, m\}$, $A \times B = \{< i, j > \ \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$.

1.1.2 Отношения и функции. Мощность множества

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R их декартова произведения $A \times B$. При $A = B$ отношение R называется *бинарным отношением на* A. Вместо $< x, y > \in R$ часто пишут xRy. Например, для отношений порядка на множестве натуральных чисел N используют записи вида $3 \leq 7$, $x = 45$, $z > y$ и т.п.

Тождественным отношением на множестве A называется отношение $I_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$. Его часто обозначают знаком равенства "=".

С бинарным отношением R связана его *область определения* $\delta_R = \{x \mid$ существует y такое, что $< x, y > \in R\}$ и его *область значений* $\rho_R = \{y \mid$ существует x такое, что $< x, y > \in R\}$.

Обратным отношением для бинарного отношения R называется множество пар $R^{-1} = \{< x, y > \mid < y, x > \in R\}$. *Образом множества* X *относительно* R называется множество $R(X) = \{y \mid$ существует $x \in X$ такое, что $< x, y > \in R\}$, *прообразом* X относительно R называется $R^{-1}(X)$.

Произведением отношений $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times C$ называется отношение $R_1 \circ R_2 = \{< x, z > \mid$ существует $y \in B$ такое, что $< x, y > \in R_1, < y, z > \in R_2\}$.

Отношение f называется *функцией* из A в B (из A на B) , если $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$ (соответственно, $\rho_f = B$) и для всех x, y_1, y_2 из $< x, y_1 > \in f$ и $< x, y_2 > \in f$ следует, что $y_1 = y_2$. Запись: $f : A \to B$. Если f функция, то вместо $< x, y > \in f$ пишем $f(x) = y$ и называем y значением f на аргументе x. f называется *1-1-функцией (или обратимой функцией),* если для любых x_1, x_2, y из того, что $f(x_1) = y$ и $f(x_2) = y$ следует, что $x_1 = x_2$. Функция $f : A \to B$ называется *взаимно однозначной функцией,* если она является 1-1-функцией и $\rho_f = B$. Взаимно однозначная функция $f : A \to A$ называется *перестановкой множества* A.

n-местным (или n-арным) отношением на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется любое подмножество $A_1 \times \ldots \times A_n$. Функцию $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$ называем *n-местной (или n-арной)* функцией и пишем $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ при $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$. Чаще всего мы будем рассматривать n-местные функции для $A_1 = \ldots = A_n = A$. В этом случае $f : A^n \to B$ будем называть n-местной функцией из A в B.

Множество A называется *эквивалентным* множеству B, если между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. *Мощностью множества* A называется класс всех множеств, эквивалентных множеству A, и она обозначается через $|A|$.

Для каждого $n \in N$ мощность множества $N_n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ обозначим через n. Множества, эквивалентные множествам N_n, называются *конечными* . Для конечных множеств их мощность — это количество элементов. В частности, для пустого множества $|\emptyset| = 0$.

Каждое множество, эквивалентное N, называется *счетным* и его мощность обозначается $\aleph_0$.

В курсе дискретной математики мы будем рассматривать только конечные и счетные множества, а также — отношения и функции на таких множествах. Отметим, что многие объекты, изучаемые в дискретной математике, являются частными случаями отношений и функций на конечных множествах. К ним относятся, в частности, слова. Пусть *алфавит* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — это конечное множество элементов, называемых *символами (буквами). Слово* в алфавите A — это конечная последовательность символов этого алфавита: $w = w_1 \ldots w_n$, $w_i \in A$ при $i = 1, \ldots, n$. Число букв в этой последовательности называется *длиной слова* и обозначается $|w|$. Нетрудно понять, что слова длины n взаимно однозначно соответствуют функциям вида $f : \{1, \ldots, n\} \to A$. А именно, слову $w = w_1 \ldots w_n$, соответствует функция $f_w(i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

1.1.3 Задачи

Задача 1. *Доказать*
(а) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
(б) $A \setminus B \subseteq A$.

Задача 2. *Доказать следующие тождества:*
(а) $A \cup A = A \cap A = A$;
(б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$;
(в) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;
(г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
(е) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$;
(ж) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$;
(з) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$;
(и) $A \dot{-} \emptyset = \emptyset \dot{-} A = A$ *и* $A \dot{-} A = \emptyset$.

Задача 3. *Найти все подмножества множеств* $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{a, \{1, 2\}, \emptyset\}$.

Задача 4. *Пусть* $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$. *Определите множества* $A \times B$ *и* $B \times A$.

Задача 5. *Доказать, что*
(а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
(б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
(в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
(г) если $A \subseteq B$ *и* $C \subseteq D$, *то* $(A \times C) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

Задача 6. *Для каждого из следующих отношений определить* $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$*:*
(а) $R = \{< x, y > \mid x, y \in N$ *и* x *делит* $y\}$;
(б) $R = \{< x, y > \mid x, y \in N$ *и* $x + y \leq 10\}$;
(в) $R = \{< x, y > \mid x, y \in N$ *и* $y = 3x + 1\}$;
(г) $R = \{< x, x^2 > \mid x \in N$ *и* $x \leq 10\}$;
(д) $R = \{< a, b >, < b, c >, < b, d >, < c, d >, < d, b >\}$.

Задача 7. *Пусть множество* $S = \{< i, j > \mid 1 \leq i, j \leq 8\}$ *задает клетки шахматной доски. Опишите следующие бинарные отношения на* S*:*
(а) $L = \{< a, b > \mid$ *ладья за 1 ход может перейти с клетки a на клетку* $b\}$;
(б) $K = \{< a, b > \mid$ *конь за 1 ход может перейти с клетки a на клетку* $b\}$.

Задача 8. *Доказать, что если множества* A *и* B *конечны, то*
(а) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;
(б) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

1.2 Метод математической индукции

Математическая индукция — это весьма общий метод, позволяющий доказывать утверждения, зависящие от целочисленных параметров. Его можно сормулировать следующим образом.

Пусть $P(n)$ *— это некоторое утверждение, зависящее от целочисленного параметра* n*. Пусть, во-первых, утверждение* $P(n_0)$ *справедливо и пусть, во-вторых, для любого* $k \geq n_0$ *из справедливости* $P(k)$ *следует справедливость* $P(k+1)$*. Тогда утверждение* $P(n)$ *справедливо для всех* $n \geq n_0$*.*

Таким образом доказательство "по индукции"состоит из двух этапов.
1) *Базис (или основание) индукции* состоит в доказательстве утверждения $P(n_0)$ для некоторого начального значения n_0 (обычно $n_0 = 1$, но это не обязательно).

2) *Шаг индукции* состоит в предположении справедливости $P(n)$ при $n = k \geq n_0$ и доказательстве из этого предположения справедливости утверждения $P(k+1)$.

Рассмотрим несколько примеров применения метода математической индукции.

Пример 1. Доказать, что при $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

1) *Базис индукции.* При $n = 1$ имеем $1^3 = \frac{(1(1+1))^2}{4}$.
2) *Шаг индукции.* Допустим, что при $n = k$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{(k(k+1))^2}{4}.$$

Докажем тогда, что при $n = k + 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{((k+1)(k+2))^2}{4}.$$

Действительно, $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k(k+1))^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \cdot (\frac{k^2}{4} + k + 1) = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4} = \frac{((k+1)(k+2))^2}{4}$. Таким образом наше утверждение выполнено при всех $n \geq 1$.

Пример 2. Доказать, для любого $x > -1$ и натурального $n \geq 2$ выполнено неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$.

1) *Базис индукции.* При $n = 2$ имеем $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.

2) *Шаг индукции.* Допустим, что при $n = k$ неравенство справедливо. Покажем, что тогда оно выполнено и при $n = k + 1$. Действительно, $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$.

Задача 9. *Доказать, что* $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.

Задача 10. *Доказать, что* $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Задача 11. *Доказать, что n различных прямых на плоскости разбивают ее на области, которые можно закрасить белой и черной красками так, что смежные области будут закрашены разными красками.*

1.3 Элементы комбинаторики

Комбинаторика — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

1.3.1 Размещения, перестановки, сочетания

Многие классические задачи комбинаторики являются задачами определения числа способов размещения некоторых объектов в каком-то количестве "ящиков"так, чтобы выполнялись определенные ограничения. Более формально такие задачи можно сформулировать следующим образом. Даны множества X, Y, причем $|X| = n$, $|Y| = m$. Сколько существует функций $f : X \to Y$, удовлетворяющих заданным ограничениям? Здесь элементы X — объекты, а элементы Y — ящики, а каждая функция $f : X \to Y$ определяет для каждого объекта $x \in X$ в какой ящик $f(x) \in Y$ он помещается.

Рассмотрим вначале простой случай, когда на размещения не накладывается никаких ограничений.

Теорема 1. *Если $|X| = n,\ |Y| = m$, то число всех функций $f : X \to Y$ равно m^n.*

Доказательство проведем индукцией по n.
Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Тогда каждая функция $f : X \to Y$ однозначно определяется последовательностью своих значений $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Пусть $F_m(n)$ — число всех таких функций (последовательностей).

Базис индукции. Ясно, что при $n = 1$ имеется ровно m различных функций: $f_i(x_1) = y_i,\ i = 1, \dots, m$, т.е. $F_m(1) = m$.

Шаг индукции. Предположим, что при $n = k$ выполнено равенство $F_m(k) = m^k$. Докажем, что тогда $F_m(k + 1) = m^{k+1}$.

Действительно, при $n = k + 1$ каждая функция $f : X \to Y$ — это последовательность $f(x_1), \dots,\ f(x_k), f(x_{k+1})$. Положив $X' = \{x_1, \dots, x_k\}$, ее можно рассматривать как функцию $f' : X' \to Y$, заданную последовательностью $f(x_1), \dots, f(x_k)$, которая дополнена одним новым значением $f(x_{k+1})$. Так как $|X'| = k$, то по предположению число таких различных функций $f' : X' \to Y$ равно $F_m(k) = m^k$. Каждая из них имеет ровно m возможных расширений $f(x_{k+1}) = y_i,\ i = 1, \dots, m$. Поэтому $F_m(k + 1) = F_m(k) \cdot m = m^{k+1}$.
□

Следствие 1.1. *Если $|X| = n$, то число всех подмножеств множества X равно $|2^X| = 2^n$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Сопоставим каждому подмножеству $X' \subseteq X$ функцию $f_{X'} : X \to \{0, 1\}$ следующим образом:

$$f_{X'}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in X' \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$(i = 1, \dots, n)$.
Ясно, что это сопоставление взаимно однозначное. Таким образом, число всех подмножеств X равно числу всех функций $f : X \to \{0, 1\}$. По теореме 1 это число равно 2^n.

Следствие 1.2. *Число всех слов длины n в алфавите $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ равно m^n.*

Найдем теперь число размещений, для которых каждый ящик содержит не более одного объекта. Такие размещения соответствуют 1-1- функциям. Обозначим через A^n_m число всех 1-1-функций из n-элементного множества в m-элементное множество. Это число называется *числом размещений из m по n.*

Теорема 2. *Если $|X| = n,\ |Y| = m$, то число всех 1-1-функций $f : X \to Y$ равно $A^n_m = m(m - 1) \dots (m - n + 1)$.*

Доказательство проведем индукцией по n (для каждого фиксированного m).

Базис индукции. Поскольку при $n = 1$ каждая функция является 1-1-функцией, то, как и в предыдущей теореме, число таких функций равно m, т.е. $A^1_m = m$.

Шаг индукции. Предположим, что при $n = k$ выполнено равенство $A^k_m = m(m - 1) \dots (m - k + 1)$. Докажем, что тогда $A^{k+1}_m = m(m - 1) \dots (m - k + 1)(m - k)$.

Действительно, как и в предыдущей теореме, каждая 1-1-функция $f : X \to Y$ является расширением некоторой 1-1-функции $f' : X' \to Y$ значением $f(x_{k+1})$ (напомним, что

$X' = X \setminus \{x_{k+1}\}$). При этом в качестве этого значения можно взять любой элемент Y, не являющийся значением f', т.е. любой элемент из множества $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_k)\}$. При $k < m$ таких элементов $(m-k)$. Тогда каждую 1-1-функцию $f' : X' \to Y$ можно расширить $(m-k)$ способами и, следовательно, $A_m^{k+1} = A_m^k(m-k)$. При $k \geq m$ 1-1-функций $f : X \to Y$ не существует (почему?) и $A_m^{k+1} = 0$, но в этом случае доказываемая формула также справедлива, поскольку один из сомножителей в ней равен 0.
□

В качестве простого следствия теоремы 2 получаем формулу для числа перестановок.

Теорема 3. *Если $|X| = n$, то число всех перестановок $f : X \to X$ равно $n!$.*

Число всех k-элементных подмножеств n-элементного множества обозначим через C_n^k (часто используется также обозначение $\binom{n}{k}$). Это число называется *числом сочетаний из n по k.*

Теорема 4. *При $n \geq k \geq 0$*

$$C_n^k = A_n^k / k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

Доказательство. При $n = k = 0$ у пустого множества имеется одно (пустое) подмножество. Поэтому $C_0^0 = 1 = \frac{0!}{0!0!}$ (напомним, что по обычному соглашению $0! = 1$).

Пусть $|Y| = n \geq 1$. Каждая 1-1-функция $f : \{1, \ldots, k\} \to Y$ определяет k-элементное подмножество $\rho_f = \{y_i \mid f(i) = y_i,\ i = 1, \ldots, k\} \subseteq Y$. При этом одно и тоже такое подмножество получается при любой перестановке элементов ρ_f. Всего таких перестановок $k!$ (по теореме 3), а 1-1-функций $f : \{1, \ldots, k\} \to Y$ — A_n^k. Отсюда, используя теорему 2, получаем, что $C_n^k = A_n^k / k! = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
□

Непосредственным следствием этой теоремы является свойство "симметричности"сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а также реккурентная формула $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, позволяющая организовать их эффективное вычисление путем последовательного получения элементов *треугольника Паскаля:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}$$
. . . .

В n-ой строке этого треугольника стоят числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ и каждое из них является суммой двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. Эти числа называются *биномиальными коэффициентами* , так как входят в формулу *бинома Ньютона*, выражающую n-ую степень бинома $x + y$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Справедливость этой формулы следует из того, что коэффициент при $x^k y^{n-k}$ равен числу способов, которыми из n сомножителей $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$ можно выбрать k сомножителей.

Задача 12. *Докажите формулу бинома Ньютона, используя метод математической индукции.*

Укажем несколько простых следствий этой формулы. Положив в ней $x = 1,\ y = 1$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Так как сумма слева определяет число всех подмножеств n-элементного множества, то это еще одно доказательство следствия 1.1.
При $x = 1,\ y = -1$ бином Ньютона дает равенство числа подмножеств четной и нечетной мощности:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1}.$$

1.3.2 Принцип включения и исключения

Во многих ситуациях для подсчета числа объектов, обладающих тем или иным набором свойств используется следующий *принцип (формула) включения и исключения.*

Пусть имеется N объектов, каждый из которых может обладать или не обладать одним или несколькими свойствами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Через p'_i будем обозначать свойство, дополнительное к свойству p_i, т.е. , если объект не обладает свойством p_i, то он обладает свойством p'_i. Через $N(q_1, \ldots, q_k)$, $q_j \in \{p_1, p'_1, \ldots, p_n, p'_n\}$ при $j = 1, \ldots, k$, обозначим число объектов, обладающих свойствами $q_1, \ldots, q_k$. Например, $N(p_1, p'_3, p_4)$ — это число объектов, обладающих свойствами p_1 и p_4 и не обладающих свойством p_3.

Теорема 5. *Число объектов, не обладающих ни одним из свойств $p_1, p_2, \ldots, p_n$ равно*

$$N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(p_i, p_j) - \ldots + (-1)^n N(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Доказательство проведем индукцией по числу свойств n.

Базис индукции. При $n = 1$ очевидно, что $N(p'_1) = N - N(p_1)$.

Шаг индукции. Предположим, что для k свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$ теорема справедлива, т.е.

$$N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k) = N - \sum_{i=1}^{k} N(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} N(p_i, p_j) - \ldots + (-1)^k N(p_1, p_2, \ldots, p_k).$$

Применяя это соотношение ко множеству из $N(p_{k+1})$ объектов, обладающих свойством p_{k+1}, находим

$$\begin{aligned} N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k, p_{k+1}) &= N(p_{k+1}) - \sum_{i=1}^{k} N(p_i, p_{k+1}) + \sum_{1 \le i < j \le k} N(p_i, p_j, p_{k+1}) - \ldots \\ &\quad + (-1)^k N(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_{k+1}). \end{aligned}$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, получаем утверждение теоремы при $n = k + 1$ (заметим, что $N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k) - N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k, p_{k+1}) = N(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k, p'_{k+1})$).
$\square$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

В студенческой группе 25 студентов. Из них 15 знают язык Паскаль, 10 — язык Си и 14 — язык Бэйсик. Кроме того, 7 студентов знают Паскаль и Си, 10 студентов — Паскаль и Бэйсик, 8 студентов — Си и Бэйсик, а 5 студентов знают все три языка. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков программирования?

Обозначив через p_1 — свойство "знать Паскаль", через p_2 — свойство "знать Си"и через p_3 — свойство "знать Бэйсик", мы можем записать данные задачи следующим образом: $N = 25$, $N(p_1) = 15$, $N(p_2) = 10$, $N(p_3) = 14$, $N(p_1, p_2) = 7$, $N(p_1, p_3) = 10$, $N(p_2, p_3) = 8$, $N(p_1, p_2, p_3) = 5$. Тогда по формуле включения и исключения число студентов, не знающих ни одного языка программирования, равно $N(p'_1, p'_2, p'_3) = 25 - 15 - 10 - 14 + 7 + 10 + 8 - 5 = 6$.

Задача 13. *Доказать тождества:*
1) $nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$
2) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.

Задача 14. *Доказать, что*
$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{[n/2]} = C_n^{]n/2[} > C_n^{]n/2[+1} > \ldots > C_n^n$

Задача 15. *Докажите, что число упорядоченных разбиений n-элементного множества на k подмножеств, первое из которых содержит n_1 элементов, второе — n_2 элементов, ... , k-ое — n_k элементов, равно* $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Задача 16. *Преподаватель рассчитывает читать один и тот же курс в течение 20 лет. Чтобы не наскучить студентам, он решил рассказывать им каждый год 3 анекдота и не повторять никакие два года одни и те же три анекдота. Каково минимальное число анекдотов, которые он должен приготовить?*

Задача 17. *На острове N живет племя туземцев, у которых набор зубов во рту состоит из 30 зубов. При этом на острове нет двух жителей с одинаковыми наборами зубов. Может ли на острове N быть больше жителей чем в*
а) Торжке? б) Твери? в) Москве? г) России? д) всем мире?

Задача 18. *Доказать* тождество Коши:

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{i=k} C_n^i C_m^{k-i}.$$

Указание: *покажите, что обе части этого равенства задают количество вариантов выбора k человек из группы, состоящей из n женщин и m мужчин.*

Задача 19. *Докажите, что число способов, которыми можно породить k-элементное множество с повторениями, имея n разных элементов, например, $1, 2, \ldots, n$, из которых каждый может использоваться произвольное число раз, равно C_{n+k-1}^k. (Например, при $n = 5, k = 4$ множество $\{1, 2, 1, 3\}$ равно множеству $\{3, 1, 1, 2\}$ и не равно множеству $\{1, 2, 2, 3\}$).*

Задача 20. *В кондитерском магазине продаются 4 сорта пирожных: заварные, песочные, "картошка"и бисквитные. Сколькими способами можно купить 6 пирожных?*

Задача 21. *Назовем два исхода первенства России по футболу* совпадающими в главном, *если в этих исходах совпадают обладатели золотых, серебрянных и бронзовых медалей, а также две команды, покидающие премьер-лигу (т.е. занявшие два последних места). Найдите число* различных в главном *исходов (напомним, что в первенстве участвуют 16 команд).*

Задача 22. *За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Нужно выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить принцессу. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не оказалось врагов.*

Решите эту задачу в случае, когда из n рыцарей за столом нужно выбрать k рыцарей.

Задача 23. *Установите принцип включения и исключения в теоретико-множественной форме.*

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — это подмножества некоторого конечного множества X. Тогда

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Задача 24. *Сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5? А в первой тысяче чисел?*

Задача 25. *Сколько целочисленных решений имеет система:*

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 7 \end{cases}$$

Задача 26. *Найти число перестановок из n-элементов, при которых ни один элемент не остается в первоначальном положении.*