Программа курса «Дискретная математика", 1 курс

1 Все специальности факультета, 1 семестр

1.1 Булевы функции

1.1.1 Булевы функции

1.1.2 Формулы. Задание функций формулами

1.1.3 Эквивалентность формул. Булевы эквивалентности

1.1.4 Многочлены Жегалкина. Единственность представления многочленом Жегалкина

1.1.5 Замкнутость и полнота

1.1.6 Максимальные подмножества. Линейные, самодвойственные и монотонные функции

1.1.7 Теорема Поста о полноте

Литература

С.В.Яблонский. Введение в дискретную математику. Глава 1. Стр.7—33.

Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике.

Стр. 20—86. Глава 1. Задачи 2.1—2.4; 2.9; 2.10; 2.17—2.19; 2.25—2.27; 3.1—3.6; 3.21; 3.24; 3.25. Глава 2. Задачи 1.1; 1.3; 1.4; 1.7; 1.19; 1.23; 2.1; 2.19; 3.1; 3.7; 3.8; 3.16; 4.13; 5.1; 5.14; 6.2.

1.2 Графы

1.2.1 Определения, описание способов задания графов и примеры графов, удовлетворяющих различным условиям

1.2.2 Достижимость. Компоненты связности. Порядок на множестве компонент

1.2.3 Деревья. Эквивалентность различных определений. Алгоритм построения самого дешёвого остова в нагруженном графе

1.2.4 Чётные графы. Теорема Эйлера о том, что можно обойти без повторений все рёбра графа тогда и только тогда, когда граф чётен. Пространство подграфов над полем из двух элементов. Теорема о размерности подпространства чётных подграфов

1.2.5 Алгоритм Дейкстры построения кратчайшего пути в связном нагруженном графе

Литература

М.А.Тайцлин. Графы.

Christofides, Nicos. Graph theory. An algorithmic approach. Computer Science and Applied Mathematics.
Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. xv+400 pp.
Книга переведена на русский язык.
Н.Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход. Перевод с английского. «Мир», Москва, 1978.

Г.Н.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике.
Глава 4. Стр. 128—129. Задачи 4.1—4.3. Стр. 132. Задача 4.27.

В семестре проводятся три контрольные работы. Для получения удовлетворительной оценки надо в первой работе решить не менее трёх задач, во второй — не менее одной задачи и в третьей работе — не менее двух задач. Для получения хорошей оценки надо решить не менее четырёх задач в первой, двух во второй работе и трёх в третьей. Для получения отличной оценки надо решить все задачи.

Общая оценка является наибольшим целым числом, не превосходящим среднего арифметического оценок, полученных за контрольные работы. Для получения общей положительной оценки необходимо иметь положительные оценки по всем трём работам.

Тексты контрольных работ

Билет 101

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1001 1000).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные днф и кнф и доказать эквивалентность формул:

$$(((\neg x\&\neg z)\vee(x\&y))\vee(x\&\neg z)),\quad ((x\&\neg(\neg y\&z))\vee(\neg x\&\neg z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, не являющихся линейными и сохраняющих нуль? Привести доказательство.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(01101001),(10001101),(00011100)\}.$$

5. Доказать, что функцию $x\to y$ нельзя получить как F-формулу, где $F=\{x+y+z,\ x+y,\ x+1\}$.

Решения

1. Легко видеть, что совершенная днф есть:

$$((\neg x\&\neg y\&\neg z)\vee(\neg x\&y\&z)\vee(x\&\neg y\neg z)).$$

Она эквивалентна

$$((\neg y\&\neg z)\vee(\neg x\&y\&z)).$$

Последняя формула является сокращённой днф. Функция не является самодвойственной, так как на наборах (0,1,1) и (1,0,0) она принимает одинаковые значения. Найдём многочлен Жегалкина:

$$((y+1)(z+1)+1)((x+1)yz+1)+1=(yz+y+z)(xyz+yz+1)+1=$$
$$xyz+yz+yz+y+z+1=1+y+z+xyz.$$

Этот многочлен содержит произведение и, значит, не является линейным. По этой причине, не является линейной и сама функция.

2.

$$(((\neg x\&\neg z)\vee(x\&y))\vee(x\&\neg z))\equiv(\neg z\vee(x\&y))\equiv((\neg z\vee x)\&(\neg z\vee y)).$$

Первые две формулы являются днф, а последняя есть кнф.

$$((x\&\neg(\neg y\&z))\vee(\neg x\&\neg z))\equiv((x\&\neg(\neg y\&z))\vee(\neg x\&\neg z))\vee(\neg(\neg y\&z)\&\neg z))\equiv$$
$$((x\&y)\vee(x\&\neg z)\vee(\neg x\&\neg z)\vee\neg z\vee(y\&\neg z))\equiv((x\&y)\vee\neg z)\equiv(\neg z\vee(x\&y)).$$

Таким образом обе формулы эквивалентны одной и той же третьей формуле, а потому эквивалентны между собой. Они имеют $((x\&y) \vee \neg z)$ в качестве днф, а $((\neg z \vee x)\&(\neg z \vee y))$ — в качестве кнф.

3. Если булева функция от n переменных сохраняет 0, то остаётся $2^n - 1$ наборов значений переменных, на которых осталось задать значения этой функции. Поэтому таких функций ровно $2^{(2^n-1)}$. Линейная функция, сохраняющая нуль, является суммой некоторых своих аргументов, значит, имеет вид

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \ \ldots\ , \alpha_n$ — либо 0, либо 1. Значит, таких функций ровно 2^n. Поэтому функций от n аргументов, одновременно сохраняющих нуль и не являющихся линейными, будет

$$2^{(2^n-1)} - 2^n.$$

4. Третья функция не сохраняет 1, а вторая не сохраняет 0. Третья функция не является самодвойственной, так как на наборах (0,0,0) и (1,1,1) принимает одинаковое значение 0. Третья функция не является монотонной, так как на наборе (0,1,1) равна 1, а на большем наборе (1,1,1) равна 0. Третья функция эквивалентна

$$((\neg x\&y\&z) \vee (x\&\neg y\&\neg z) \vee (x\&\neg y\&z)) \equiv ((\neg x\&y\&z) \vee (x\&\neg y)) \equiv$$
$$((x+1)yz+1)(x(y+1)+1)+1 \equiv (xyz+yz+1)(xy+x+1)+1 \equiv xyz+yz+xy+x.$$

Отсюда видно, что третья функция не является линейной. Следовательно, данная совокупность функций не содержится ни в одном из классов линейных, монотонных, самодвойственных, сохраняющих нуль и сохраняющих 1 функций. По теореме Поста, она полна.

5. Импликация не является линейной функцией, так как

$$(\neg x \vee y) \equiv (x(y+1)+1) \equiv xy+x+1.$$

Так как все функции из F линейны, то и все формулы, составленные из этих функций, задают линейные функции. Поэтому импликация не задаётся никакой F-формулой.

Билет 102

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1000 1000).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные днф и кнф и доказать эквивалентность формул:

$$\neg(((\neg x\&\neg z) \vee (x\&y)) \vee (x\&\neg z)), \quad \neg((x\&\neg(\neg y\&z)) \vee (\neg x\&\neg z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, являющихся линейными и сохраняющими нуль? Привести доказательство.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(01111001), (10011100), (00011101)\}.$$

5. Доказать, что каждая функция из замкнутого класса $[\{x \to y\}]$ может быть представлена в виде

$$(x_i \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Билет 103

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1010 1010).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные днф и кнф и доказать эквивалентность формул:

$$(((\neg x \& \neg z) \vee (x \& y)) \vee (x \& \neg z)), \quad ((x \& \neg(\neg y \& z)) \vee \neg(x \vee z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, являющихся самодвойственными и сохраняющими нуль? Привести доказательство.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(11001001), (10001101), (10011100)\}.$$

5. Функция $f(x, y, z)$ задана таблицей истинности $(00\alpha 11\beta 1\gamma)$. Определить α, β и γ так, чтобы эта функция образовывала базис в P_0. P_0 состоит из всех функций, сохраняющих ноль. Привести доказательство.

Билет 104

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1000 1001).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные днф и кнф и доказать эквивалентность формул:

$$(x \to ((x\&y) \to (((x \to y) \to y)\&z))), \quad (y \to (x \to z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, не являющихся самодвойственными и сохраняющими единицу? Привести доказательство.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(01101011), (10011101), (10011100)\}.$$

5. Доказать, что никакая максимальная элементарная конъюнкция для монотонной функции не содержит отрицаний переменных.

Билет 105

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1011 1000).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные днф и кнф и доказать эквивалентность формул:

$$\neg(x \to ((x\&y) \to (((x \to y) \to y)\&z))), \quad \neg(y \to (x \to z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, не являющихся самодвойственными и сохраняющими нуль? Привести доказательство.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(01101111), (11011101), (11011100)\}.$$

5. Доказать, что дополнение замкнутого множества булевых функций не может быть замкнутым множеством булевых функцй, если оно не пусто и отлично от множества всех булевых функций.

Билет 106

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1000 1110).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность формул:

$$(((\neg x \& \neg z) \vee (x \& y)) \vee (x \& \neg z)), \quad ((x \& \neg(\neg y \& z)) \vee (\neg x \& \neg z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения? Привести доказательство. Наборы из нулей и единиц называются противоположными, если один из них получается из другого заменами нулей на единицы и единиц на нули. Например, наборы (010) и (101) являются противоположными.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(10101011), (11010101), (11010100)\}.$$

5. Доказать, что никакой базис во множестве всех булевых функций не может содержать более четырсх функций.

Билет 107

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1111 1000).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность формул:

$$\neg(((\neg x \& \neg z) \vee (x \& y)) \vee (x \& \neg z)), \quad \neg((x \& \neg(\neg y \& z)) \vee (\neg x \& \neg z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, принимающих на соседних наборах одинаковые значения? Привести доказательство. Наборы называются соседними, если они различны, но различаются ровно в одной координате. Например, наборы (1001) и (1011) являются соседними, но наборы (1001) и (1111) не являются соседними.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(01100011), (01011101), (11010100)\}.$$

5. Доказать, что дополнение замкнутого непустого множества функций, отличного от множества всех булевых функций, не является замкнутым множеством функций. Дополнение множества F булевых функций содержит те и только те булевы функции, которые не содержатся в F.

Билет 108

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1100 1001).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность формул:

$$(((\neg x\&\neg z) \vee (x\&y)) \vee (x\&\neg z)), \quad ((x\&\neg(\neg y\&z)) \vee \neg(x \vee z)).$$

3. Сколько существует различных линейных функций от n переменных, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения? Привести доказательство. Наборы из нулей и единиц называются противоположными, если один из них получается из другого заменами нулей на единицы и единиц на нули. Например, наборы (010) и (101) являются противоположными.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(11100010), (01010101), (01010100)\}.$$

5. Доказать, что если замкнутое множество имеет конечный базис, то всякий базис в этом множестве конечен.

Билет 109

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1001 1100).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность формул:

$$(x \to ((x \& y) \to (((x \to y) \to y) \& z))), \quad (y \to (x \to z)).$$

3. Сколько существует различных булевых функций от n переменных, принимающих на противоположных наборах противоположные значения? Привести доказательство. Наборы из нулей и единиц называются противоположными, если один из них получается из другого заменами нулей на единицы и единиц на нули. Например, наборы (010) и (101) являются противоположными.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(10100011), (01010101), (01010100)\}.$$

5. Доказать, что множество $\{0, 1, \&, \vee\}$ образует базис во множестве всех монотонных функций.

Билет 110

1. Наборы значений аргументов упорядочены лексикографически. Значение булевой функции от трех аргументов задается последовательностью длины 8 нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 0 или 1 в зависимости от того, ложна или истинна рассматриваемая функция на этом наборе. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму, эквивалентный многочлен Жегалкина и определить, является ли линейной и является ли самодвойственной следующая функция:

(1001 1010).

2. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность формул:

$$\neg(x \to ((x\&y) \to (((x \to y) \to y)\&z))), \quad \neg(y \to (x \to z)).$$

3. Сколько существует различных линейных функций от n переменных, принимающих на противоположных наборах противоположные значения? Привести доказательство. Наборы из нулей и единиц называются противоположными, если один из них получается из другого заменами нулей на единицы и единиц на нули. Например, наборы (010) и (101) являются противоположными.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

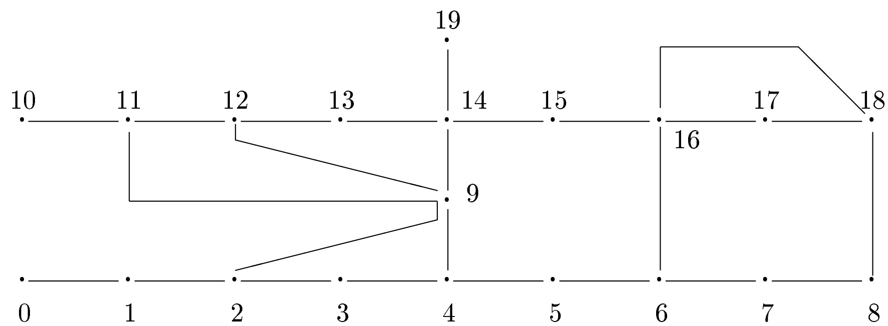
$$\{(01101010), (01011111), (11110100)\}.$$

5. Доказать, что любая линейная функция либо сохраняет ноль, либо сохраняет единицу, либо является монотонной, либо является самодвойственной.

Билет 201

1. Доказать, что неориентированный граф без петель, в котором 20 вершин и 172 ребра, является связным.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:

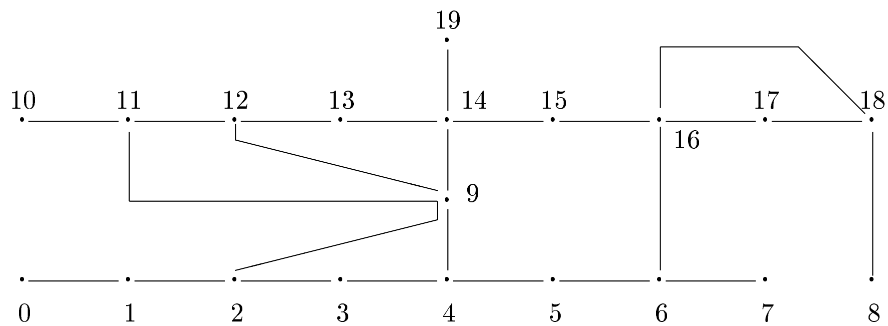


3. Привести пример связного двудольного графа, не являющегося деревом, индекс каждой вершины которого нечстен. Привести подробное доказательство.

Билет 202

1. Доказать, что в дереве высоты 10 с 10000 вершин имеется три различных вершины индекса 1.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:

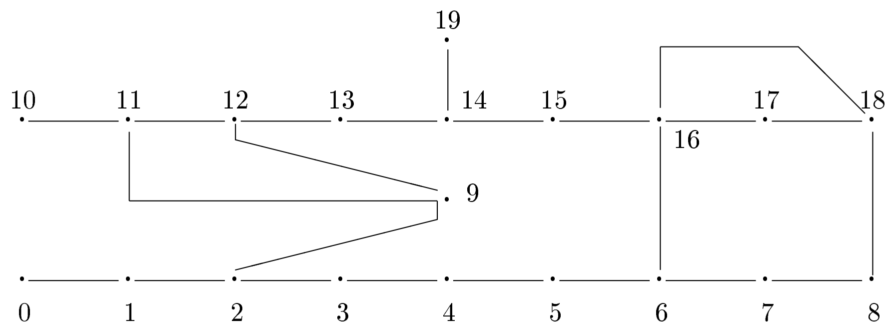


3. Доказать, что каждое дерево не имеет чстных подграфов.

Билет 203

1. Доказать, что если из дерева выбросить ребро, то полученный граф будет иметь ровно две компоненты связности.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:

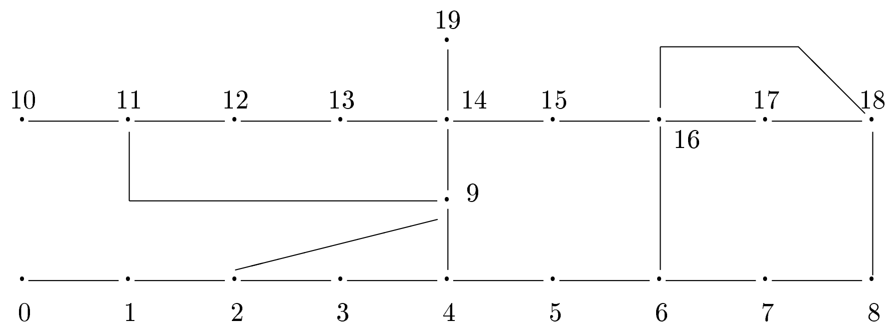


3. Привести пример чстного связного неориентированного графа, который не является двудольным и содержит 9 вершин. Привести подробное доказательство.

Билет 204

1. Доказать, что в любом дереве, содержащем вершину индекса 100, имеется не менее 100 вершин индекса 1.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:



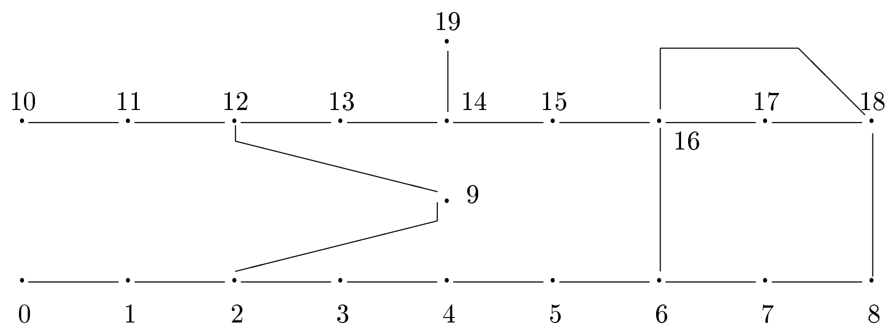
3. Привести пример нечстного двудольного связного графа с 8 вершинами.

Билет 205

1. Пересечением двух графов называется граф, вершинами которого являются общие вершины пересекаемых графов, а рсбрами которого являются общие рсбра пересекаемых графов. Поддеревом дерева D называется дерево, вершины которого являются вершинами дерева D, а рсбра которого являются рсбрами дерева D.

Показать, что два поддерева одного дерева либо не имеют общих вершин, либо их пересечение является деревом.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:



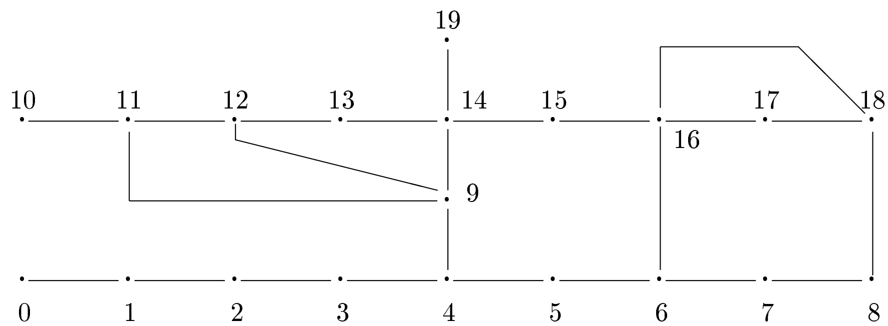
3. Является ли граф из предыдущей задачи связным?

Привести подробное доказательство. Сколько рсбер можно выбросить из этого графа, чтобы он стал двудольным.

Билет 206

1. Доказать, что если в связном неориентированном графе без петель число вершин индекса 1 равно числу рсбер, то этот граф является деревом.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:



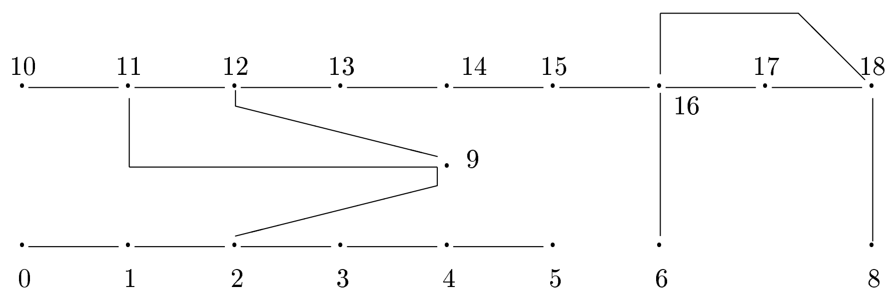
3. Является ли граф из предыдущей задачи двудольным? Привести доказательство.

Каково минимальное число рсбер, которое достаточно выбросить из этого графа, чтобы он стал двудольным?

Билет 207

1. Доказать, что если в связном графе число вершин равно числу рсбер, то после выбрасывания какого-то одного ребра этот граф станет деревом.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:



3. Является ли граф из предыдущей задачи двудольным?

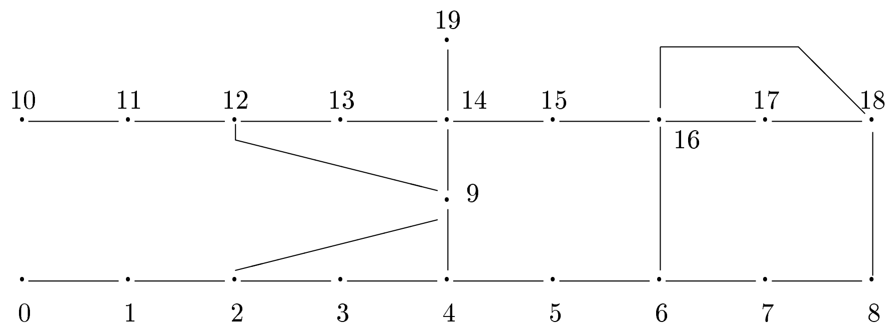
Привести подробное доказательство.

Каково минимальное число рсбер, которое достаточно выбросить из этого графа, чтобы он стал двудольным?

Билет 208

1. Доказать, что в связном графе число ребер не меньше числа вершин или равно числу вершин, уменьшенному на 1.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:



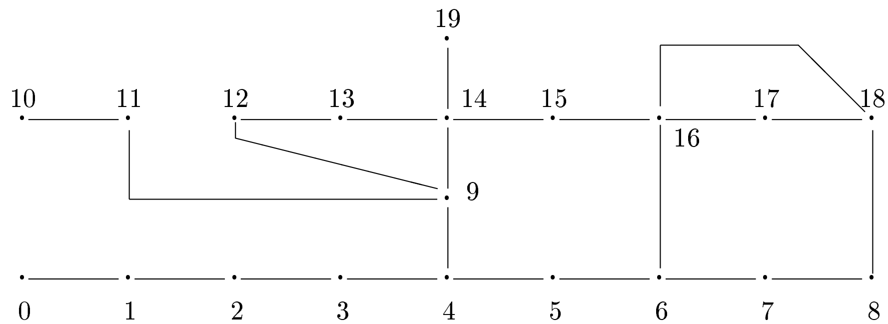
3. Привести пример двудольного конечного чстного графа, не являющегося связным.

Привести подробное доказательство.

Билет 209

1. Доказать, что в связном неориентированном графе, в котором число вершин равно числу ребер, существует ребро, после выбрасывания которого граф останется связным.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:

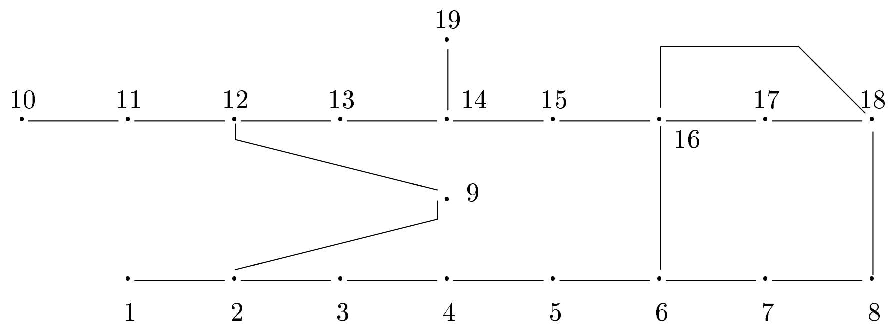


3. Привести пример связного двудольного графа, не являющегося деревом и не являющегося чстным. Привести подробное доказательство.

Билет 210

1. Доказать, что если в дереве имеется ровно 10 вершины индекса 1, то индекс каждой вершины не больше 10.

2. В следующем графе найти базис в пространстве четных подграфов:

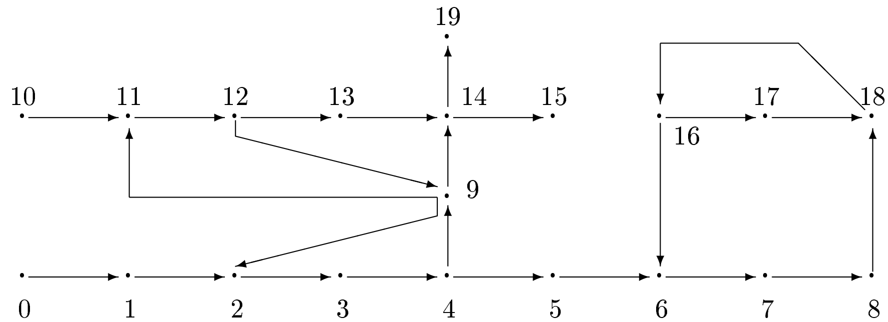


3. Привести пример двудольного четного графа, который не является связным.

Привести подробное доказательство.

Билет 301

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 33 & 16 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

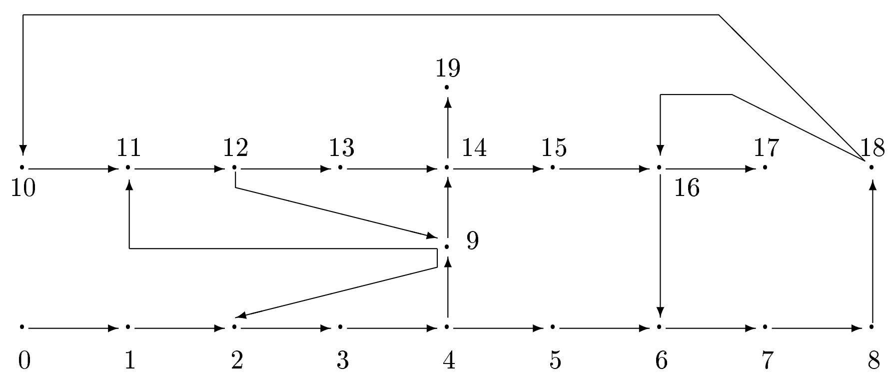
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 91 & 1 & 2 & 9 \\ 91 & 0 & 110 & 1100 & 11 \\ 1 & 110 & 0 & 77 & 18 \\ 2 & 1100 & 77 & 0 & 7 \\ 9 & 11 & 18 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры каждая временная метка не меньше каждой постоянной метки.

Билет 302

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 2 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

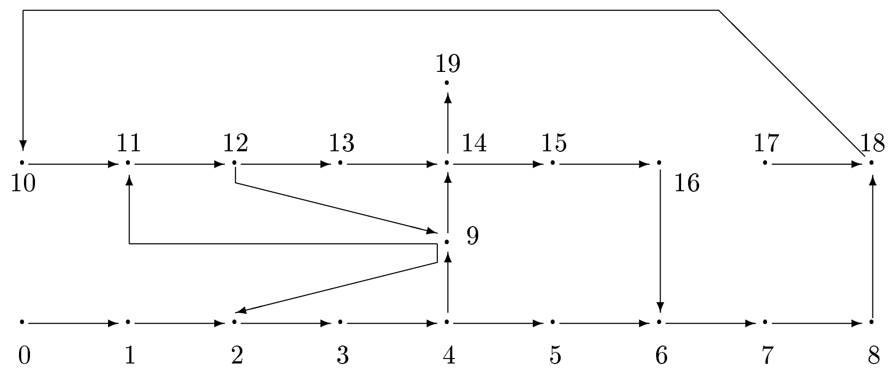
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 91 & 1 & 2 & 9 \\ 91 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 11 & 0 & 7 & 18 \\ 2 & 11 & 7 & 0 & 7 \\ 9 & 11 & 18 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры кратчайший путь для каждой вершины с постоянной меткой проходит только через вершины, которые уже получили до этого шага постоянную метку.

Билет 303

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

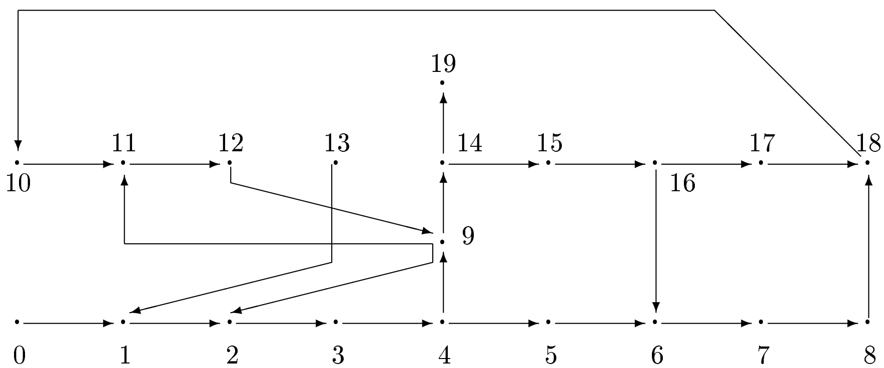
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 91 & 1109 & 2008 & 9 \\ 91 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1109 & 11 & 0 & 700 & 18 \\ 2008 & 11 & 700 & 0 & 7 \\ 9 & 11 & 18 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что в алгоритме Дейкстры постоянная метка не меньше любой другой постоянной метки, полученной раньше.

Билет 304

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 33 & 16 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 1 & 101 & 0 & 7 & 1 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

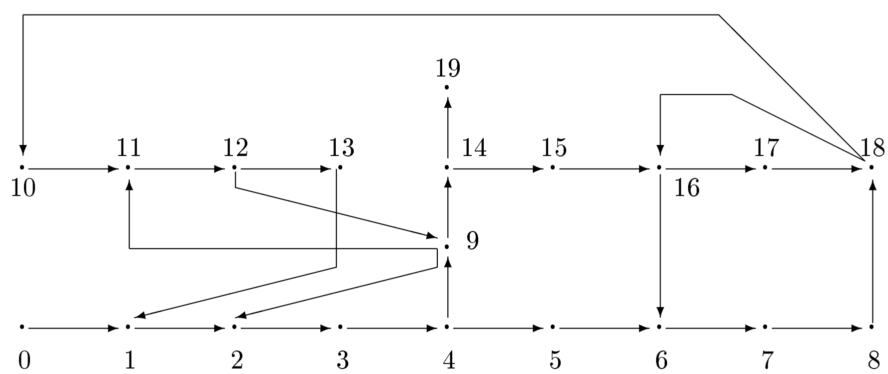
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 191 & 1109 & 2008 & 719 \\ 191 & 0 & 101 & 11 & 11 \\ 1109 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 2008 & 11 & 7 & 0 & 7 \\ 719 & 11 & 18 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Привести пример, показывающий, что алгоритм Дейкстры не является корректным в случае, когда рсбра могут иметь отрицательную стоимость.

Билет 305

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2 & 719 \\ 10 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 22 & 1 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

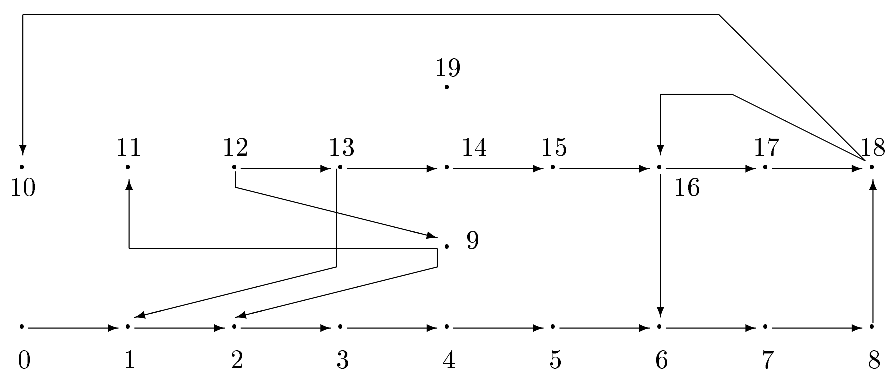
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 19 & 110 & 200 & 71 \\ 19 & 0 & 101 & 11 & 11 \\ 110 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 200 & 11 & 7 & 0 & 700 \\ 71 & 11 & 18 & 700 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры каждая временная метка не меньше временной метки этой же вершины на каждом предыдущем шаге.

Билет 306

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 33 & 16 & 277 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 777 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

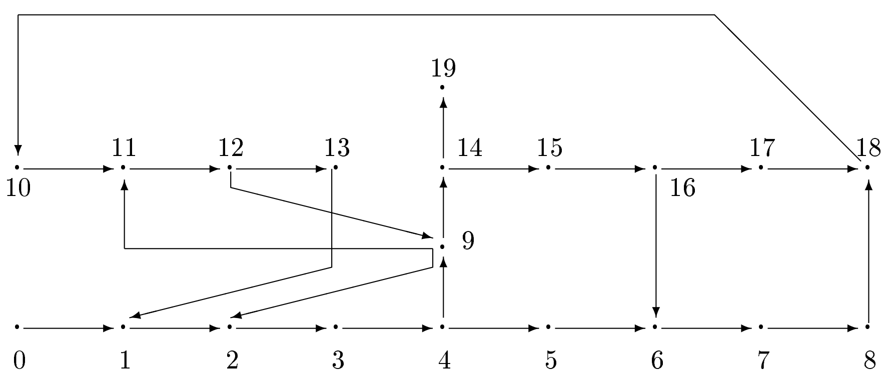
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 & 2 & 71 \\ 1 & 0 & 101 & 11 & 1100 \\ 11 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 2 & 11 & 7 & 0 & 7 \\ 71 & 1100 & 18 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Сколько раз может меняться временная метка вершины в ходе работы алгоритма Дейкстры для графа с 6 вершинами. Привести пример на каждый возможный случай.

Билет 307

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 33 & 16 & 2 & 719 \\ 17 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 2 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 4 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

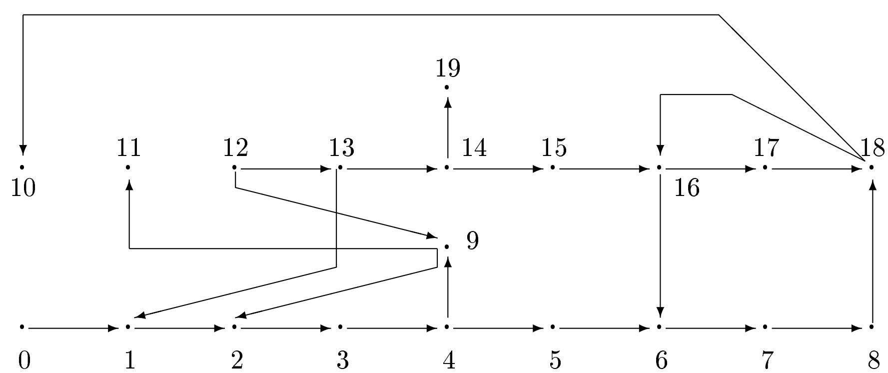
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1000 & 11 & 2000 & 71 \\ 1000 & 0 & 101 & 11 & 1100 \\ 11 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 2000 & 11 & 7 & 0 & 77 \\ 71 & 1100 & 18 & 77 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Может ли случиться так, что все временные метки меняются на каждом шаге алгоритма Дейкстры? Привести доказательство. А может ли случиться, что временные метки не меняются ни на одном шаге этого алгоритма? Привести пример.

Билет 308

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 33 & 16 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 3 & 222 & 3 \\ 100 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 220 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 545 & 1 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

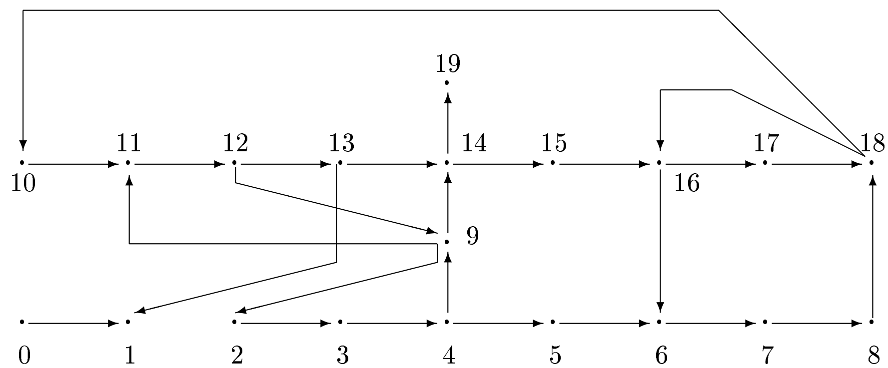
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 & 2000 & 71 \\ 1 & 0 & 101 & 11 & 1100 \\ 11 & 101 & 0 & 777 & 18 \\ 2000 & 11 & 777 & 0 & 77 \\ 71 & 1100 & 18 & 77 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что в алгоритме Дейкстры постоянная метка не меньше любой другой постоянной метки, полученной раньше.

Билет 309

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2 & 719 \\ 170 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 777 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 1 & 160 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

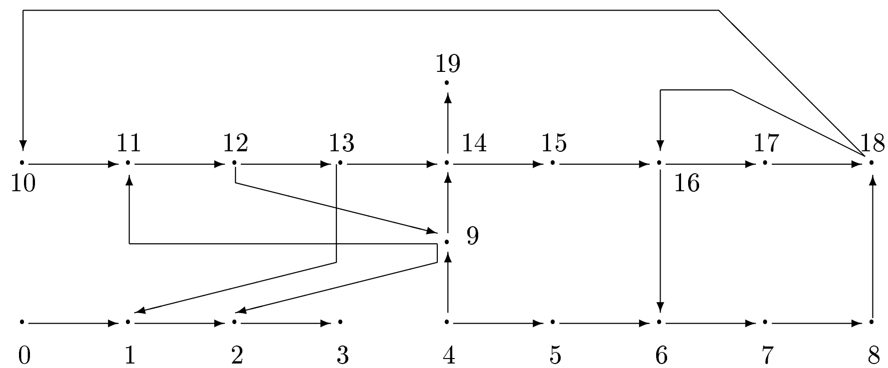
3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2000 & 71 \\ 133 & 0 & 101 & 11 & 11 \\ 116 & 101 & 0 & 777 & 18 \\ 2000 & 11 & 777 & 0 & 77 \\ 71 & 11 & 18 & 77 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры кратчайший путь для каждой вершины с постоянной меткой проходит только через вершины, которые уже получили до этого шага постоянную метку.

Билет 310

1. Найти все базы и все компоненты сильной связности следующего графа:



Описать отношение достижимости на компонентах.

2. С помощью алгоритма Дейкстры построить самый дешсвый путь из вершины 1 в вершину 5 в ориентированном нагруженном графе, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2 & 719 \\ 10 & 0 & 36 & 222 & 3 \\ 10 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 22 & 11 & 46 & 0 & 77 \\ 54 & 11 & 16 & 111 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Построить самый дешсвый остов для неориентированного нагруженного графа, в котором стоимости рсбер заданы таблицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 133 & 116 & 2 & 719 \\ 133 & 0 & 101 & 11 & 11 \\ 116 & 101 & 0 & 7 & 18 \\ 2 & 11 & 7 & 0 & 77 \\ 719 & 11 & 18 & 77 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры каждая временная метка не меньше каждой постоянной метки.

2 Специальность "Прикладная математика", 2 семестр

2.1 Конечные автоматы

2.1.1 Алфавит, слова, языки

2.1.2 Операции над языками

2.1.3 Конечные автоматы

2.1.4 Дедетерминированные конечные автоматы

2.1.5 Теорема о том, что язык, заданный недетерминированным конечным автоматом, может быть задан и некоторым детерминированным конечным автоматом

2.1.6 Регулярные выражения и регулярные множества

2.1.7 Задание регулярных множеств конечными автоматами

2.1.8 Свойства замкнутости для автоматных языков

2.1.9 Алгоритмические проблемы для автоматных языков

2.1.10 Теорема о разрастании для автоматных языков

2.1.11 Примеры языков, не задаваемых конечными автоматами

2.1.12 Грамматики. Автоматные грамматики

Литература

А.П.Столбоушкин, М.А.Тайцлин. Математические основания информатики. Часть 1, глава 1. Стр. 10-34.

Упражнения : 1.4.3, стр. 27; 1.4.4, стр.28; 1.5.1—1.5.8, стр.31—32; 1.6.2, стр.34.

Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. Глава 6. Стр. 178—186.

Упражнения: 1.1—1.12.

2.2 Рекурсивные функции

2.2.1 Программы

2.2.2 Рекурсивные функции

2.2.3 Вычислимость рекурсивных функций

2.2.4 Машины Тьюринга

2.2.5 Тьюрингова вычислимость

Литература

А.П.Столбоушкин, М.А.Тайцлин. Математические основания информатики. Часть 2, глава 4, 4.1—4.4; 4.7—4.9. Стр. 171—191; 200—221.

Упражнения: 4.6.1, 4.6.2, 4.6.4, 4.6.5 на стр.198-200; 4.11.1, 4.11.2 на стр. 229—230.

Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. Глава 7. Стр. 213—240. Упражнения: 1.1—1.11; 1.15, 1.16; 2.1—2.6, 2.11.

В семестре проводятся три контрольные работы. Для получения удовлетворительной оценки надо в первой работе решить не менее трёх задач, во второй — не менее одной задачи и хотя бы частично решить задачу в третьей работе. Для получения хорошей оценки надо решить не менее пяти задач в первой и двух во второй работе и решить задачу в третьей. Для получения отличной оценки надо решить все задачи. В третьей работе разница между хорошей и отличной оценками определяется полнотой приводимых формальных доказательств.

Общая оценка является наибольшим целым числом, не превосходящим среднего арифметического оценок, полученных за контрольные работы. Для получения общей положительной оценки необходимо иметь положительные оценки по всем трём работам.

Тексты контрольных работ

Билет 101

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, начинающиеся на 101 и заканчивающиеся на 101.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей равно числу единиц, увеличенному на 5.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aa, \quad \psi(1) = ba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц. Докажите, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, но не является отношением конгруентности.

Решения

1. Искомым автоматом может быть следующий конечный автомат:

Буква / Состояние	$q1$ начальное	$q2$	$q3$	$q4$ заключительное	$q5$	$q6$	$q7$	$q8$
0	$q8$	$q3$	$q8$	$q6$	$q6$	$q7$	$q7$	$q8$
1	$q2$	$q8$	$q4$	$q5$	$q5$	$q4$	$q5$	$q8$

В самом деле, этот автомат сначала проверяет, начинается ли слово на 101. Если не начинается, автомат переходит в незаключительное состояние $q8$, в котором и остаётся уже навсегда. Иначе автомат переходит в заключительное состояние $q4$, так как слово 101 заканчивается на 101 и должно восприниматься автоматом.

После этого состояние $q4$ говорит, что слово заканчивается на 101, состояние $q5$ говорит, что слово заканчивается на 11 или на 001, состояние $q6$ говорит, что слово заканчивается на 10, а состояние $q7$ говорит, что слово заканчивается на 00.

Действительно, если это верно для начинающихся на 101 слов длины k, то это верно и для таких слов длины $k + 1$.

Грамматика, задающая этот язык, в которой $q1$ — начальный нетерминал:

$$q1 \to 1q2,\ q2 \to 0q3,\ q3 \to 1q4 \mid 1,\ q4 \to 0q6 \mid 1q5,$$
$$q5 \to 0q6 \mid 1q5,\ q6 \to 0q7 \mid 1q4 \mid 1,\ q7 \to 0q7 \mid 1q5.$$

2. Этому языку принадлежат, в частности, слова вида $0^{i+5}1^i$. Если бы этот язык был регулярным, то, по теореме о разрастании, для него нашлось бы такое чило n, что для слов из этого языка, длина которых превосходит n, каждое такое слово можно было бы представить в виде rst так, что длины r и s не превосходят n, s является непустым словом и слово rs^it принадлежит нашему языку при любом натуральном i. В частности, это было бы верно для слова $0^{2n+5}1^{2n}$, длина которого больше n. Но так как длины r и s при этом не превосходят n, то s состоит только из нулей. Но тогда в слове $rsst$ число нулей больше числа единиц, увеличенного на 5, и, значит, это слово не принадлежит рассматриваемому языку, что противоречит указанному свойству представления rst.

3. Если слово начинается на 0, то в оставшемся слове нулей на 4 больше, чем единиц. Если же слово начинается на 1, то сначала больше единиц, а в конце больше нулей. По этой причине, найдётся момент, когда число нулей сравняется с числом единиц. Значит, слово разбивается на слово с одинаковым числом нулей и единиц и слово, в котором нулей на 5 больше, чем единиц. Грамматика:

$$S_5 \to 0S_4 \mid SS_5, \quad S_4 \to 0S_3 \mid SS_4, \quad S_3 \to 0S_2 \mid SS_3,$$
$$S_2 \to 0S_1 \mid SS_2, \quad S_1 \to 0 \mid 0S \mid SS_1, \quad S \to 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid 01 \mid 10.$$

4. Каждая чётная буква должна быть a. Нечётная буква определяет следующее состояние. Поэтому автомат, задающий гомоморфный образ языка, может быть следующим:

Состояние / Буква	a	b
начальное $q1a$	$q8$	$q2b$
$q1b$	$q1a$	$q8$
$q2a$	$q3b$	$q8$
$q2b$	$q2a$	$q8$
$q3a$	$q8$	$q4b$
$q3b$	$q3a$	$q8$
заключительное $q4a$	$q6b$	$q5b$
$q4b$	$q4a$	$q8$
$q5a$	$q6b$	$q5b$
$q5b$	$q5a$	$q8$
$q6a$	$q7b$	$q4b$
$q6b$	$q6a$	$q8$
$q7a$	$q7b$	$q5b$
$q7b$	$q7a$	$q8$
$q8$	$q8$	$q8$

5. Сначала проверяем, что слово начинается на 101. После этого надо считать число нулей после этого первого вхождения 101. Если это число окажется нечётным и мы опять втретили 101, то надо переходить в заключительное состояние, в котором оставаться дальше всегда. В самом деле, если после этого нового вхождения 101 число нулей чётно, то слово является конкатенацией слова, заканчивающимся этим вхождением, и слова с чётным числом нулей. Иначе слово является конкатенацией 101 и слова с чётным числом нулей. Кроме того, заключительным надо объявить каждое состояние, в котором число нулей после первого вхождения 101 чётно.

Состояние / Буква	0	1
начальное $q1$	$q8$	$q2$
$q2$	$q3$	$q8$
$q3$	$q8$	$q4a$
заключительное $q4a$	$q6b$	$q5a$
заключительное $q4b$	$q4b$	$q4b$
заключительное $q5a$	$q6b$	$q5a$
$q5b$	$q6a$	$q5b$
заключительное $q6a$	$q7b$	$q4a$
$q6b$	$q7a$	$q4b$
заключительное $q7a$	$q7b$	$q5a$
$q7b$	$q7a$	$q5b$
$q8$	$q8$	$q8$

6. Это отношение симметрично и рефлексивно. Оно также транзитивно. Если имеем три слова, из которых первые два и последние два находятся в этом отношении, то знак разности между числом нулей и числом единиц как в первых двух словах, так и в последних двух словах один и тот же. Поэтому в первом и в третьем словах этот знак тоже один и тот же. Например, если в первом и во втором словах число нулей больше числа единиц, то и в третьем слове число нулей больше числа единиц. Иначе третье слово не находилось бы в рассматриваемом отношении со вторым.

Вместе с тем это отношение не является отношением конгруентности. Например, слова 110 и 111110 находятся в этом отношении, но слова 000110 и 000111110 уже не находятся в этом отношении. В первом из них больше нулей, а во втором больше единиц.

Билет 102

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, содержащие 101 в качестве подслова и имеющие четное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей больше числа единиц на 5.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = baa.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц на одно и то же число, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц на одно и то же число. Докажите, что это отношение действительно является отношением конгруентности, но не является отношением конгруентности конечного индекса.

Билет 103

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, содержащие 111 в качестве подслова и имеющие четное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей больше числа единиц на 4.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = ba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц на 2, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц на 2. Докажите, что это отношение не является отношением эквивалентности.

Билет 104

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, оканчивающиеся на 111 и имеющие четное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей больше числа единиц на 2.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = ab.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц на 2, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц на 7. Докажите, что это отношение не является отношением эквивалентности.

Билет 105

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, оканчивающиеся на 11 и имеющие нечетное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей меньше числа единиц на 2.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = ba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц. Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности, но не является отношением конгруентности.

Билет 106

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, начинающиеся на 101 и имеющие нечетное число елиниц.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей меньше числа единиц на 6.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = aaa.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей меньше числа единиц на одно и то же число, либо в каждом из них число нулей больше числа единиц на одно и то же число. Доказать, что это отношение является отношением конгруентности. Сколько классов эквивалентности имеет отношение?

Билет 107

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, начинающиеся на 010 и имеющие нечетное число елиниц.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей больше числа единиц на 8.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = bbba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если

либо в каждом из них или число нулей больше 10 или число единиц больше 5;

либо в каждом из них число нулей не больше 10, число единиц не больше 5, а числа нулей и единиц в этих словах одинаковы (например, слова 10011 и 11100 эквивалентны, так как в каждом из них по три единицы и по два нуля, а слова 1001 и 1110 не являются эквивалентными, так как в первом из них две единицы, а во втором — три).

Докажите, что это отношение является отношением конгруентности конечного индекса. Сколько классов эквивалентности всего имеется?

Билет 108

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, оканчивающиеся на 000 и имеющие четное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей меньше числа единиц на 8.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = aaba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если

либо в каждом из них число нулей равно числу единиц;

либо в каждом из них число нулей больше 11 и отлично от числа единиц;

либо в каждом из них число нулей меньше 12 и меньше числа единиц на одно и то же число;

либо в каждом из них число нулей меньше 12 и больше числа единиц на одно и то же число.

Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности, но не является отношением конгруентности.

Билет 109

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, начинающиеся на001 и имеющие четное число единиц.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей на два больше числа единиц.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = ab.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если

либо в каждом из них число нулей равно числу единиц;

либо в каждом из них или число нулей отлично от числа единиц и больше 10, или число единиц отлично от числа нулей и больше 15;

либо в каждом из них число нулей меньше 11 и меньше числа единиц на одно и то же положительное число, а число единиц меньше 16;

либо в каждом из них число нулей меньше 11 и больше числа единиц на одно и то же положительное число, а число единиц меньше 16.

Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности конечного индекса, но не является отношением конгруентности. Сколько существует классов эквивалентности по этому отношению?

Билет 110

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, содержащие 000 в качестве подслова и имеющие нечетное число единиц.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей больше числа единиц на 9.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = bba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если

либо в каждом из них число нулей равно числу единиц;

либо в каждом из них число единиц больше 21 и отлично от числа нулей;

либо в каждом из них число единиц меньше 22 и меньше числа нулей на одно и то же положительное число;

либо в каждом из них число единиц меньше 22 и больше числа нулей на одно и то же положительное число.

Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности, но не является отношением конгруентности.

Билет 111

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, оканчивающиеся на 11 и имеющие нечетное число нулей.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей меньше числа единиц на 12.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = bba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число единиц.

6. Пусть два слова эквивалентны, если

либо в каждом из них число нулей равно числу единиц;

либо в каждом из них или число нулей больше 8 и отлично от числа единиц, или число единиц больше 15 и отлично от числа нулей;

либо в каждом из них число нулей не больше 8, число единиц не больше 15, а число нулей меньше числа единиц на одно и то же положительное число;

либо в каждом из них число нулей не больше 8, число единиц не больше 15, а число нулей больше числа единиц на одно и то же положительное число.

Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности конечного индекса, но не является отношением конгруентности. Сколько классов эквивалентности всего имеется?

Билет 112

1. Постройте конечный автомат и леволинейную грамматику, задающие язык:

все слова, оканчивающиеся на 001 и имеющие нечетное число единиц.

2. Докажите, что следующий язык не является автоматным:

все слова, в которых число нулей равно числу единиц, уменьшенному на 3.

3. Постройте кс-грамматику для этого языка и докажите её корректность.

4. Постройте конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка задачи 1 при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aabb, \quad \psi(1) = bba.$$

5. Постройте детерминированный конечный автомат, задающий конкатенацию языка задачи 1 и языка, состоящего из всех слов, в которых четное число нулей.

6. Пусть два слова эквивалентны, если либо в каждом из них число нулей равно числу единиц, либо в каждом из них число нулей больше 10, либо в каждом из них число единиц больше 5. Докажите, что это отношение не является отношением эквивалентности.

Билет 201

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|, \\ [\sqrt{2x}\ ], & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt[3]{y}\ ], & \text{если } 2x > |x-y|), \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Произведением множеств A и B называется множество $\{a * b \mid a \in A, b \in B\}$.

Докажите, что произведение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 202

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt[3]{y}], & \text{если } x! > |x-y|), \\ 2[\log_2 x], & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Докажите, что пересечение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 203

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y, & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > |x-y|, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\log_2 x] > 2y, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Разность двух множеств содержит те и только те элементы, которые одновременно входят в первое и не входят во второе из этих множеств.

Докажите, что разность рекурсивных множест является рекурсивным множеством.

Билет 204

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > |x-y|, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y, & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > |x-y|, \\ y!\ , & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Суммой множеств A и B называется множество $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

Докажите, что сумма рекурсивных множест рекурсивна.

Билет 205

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} rest(x,y), & \text{если } [\log_2 x] > 2 + y, \\ x!\ , & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > 2y, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Докажите, что пересечение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 206

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)!\ , & \text{если } [\sqrt{2|x-y|}\ ]>2y,\\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ]>2y,\\ 2|x-y|, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Разность двух множеств содержит те и только те элементы, которые одновременно входят в первое и не входят во второе из этих множеств.

Докажите, что разность рекурсивных множест рекурсивна.

Билет 207

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt[4]{x+y}\ ], & \text{если } 2x > |x-y|), \\ 2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Докажите, что объединение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 208

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt[3]{y}], & \text{если } x! > |x-y|), \\ rest(y, 2x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} y!\ , & \text{если } 2x > |x-y|), \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Докажите, что пересечение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 209

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt{y}\ ], & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|), \\ rest(y, 2+x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Разность двух множеств содержит те и только те элементы, которые одновременно входят в первое и не входят во второе из этих множеств.

Докажите, что разность рекурсивных множест рекурсивна.

Билет 210

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} rest(x,y), & \text{если } [\log_2 x] > 2 + y, \\ y!\ , & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} y!\ , & \text{если } [\sqrt{y}\ ] > 2x, \\ 2 + y, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Докажите, что объединение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 211

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\sqrt{y}\ ] > |x-y|, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} x!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > |x-y|, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Произведением множеств A и B называется множество $\{a*b \mid a \in A, b \in B\}$.

Докажите, что произведение рекурсивных множест рекурсивно.

Билет 212

1. Построить программу, вычисляющую в x_1 функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-y|!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > 2y, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать рекурсивность функции:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)!\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] = 2y, \\ 2|x-y|, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Характеристической функцией множества A натуральных чисел называется арифметическая функция, равная единице на A и нулю вне A.

Множество натуральных чисел называется рекурсивным, если рекурсивной является его характеристическая функция.

Суммой множеств A и B называется множество $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

Докажите, что сумма рекурсивных множест рекурсивна.

Билет 301

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } x > y, \\ [\sqrt{2x}\ ], & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 302

1.Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}[\sqrt{y}], & \text{если } x>y,\\ 2x, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 303

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } x < y, \\ [\sqrt{x}]\ , & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 304

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } x > y, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 305

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } [\sqrt{x}\ ] > 2y, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 306

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\ , & \text{если } x > y, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 307

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\sqrt{x+y}\,], & \text{если } x > y), \\ 2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 308

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} y!\ , & \text{если } x > y, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 309

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } [\log_2 x] > |x-y|, \\ 2x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 310

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} rest(x,y), & \text{если } x > 2+y, \\ y, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 311

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ , & \text{если } x > y, \\ rest(x,y), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.

Билет 312

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\ , & \text{если } x>y,\\ 2|x-y|, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

и доказать корректность построенной машины.