МОДУЛЬ 1

Вариант 1

1. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.

$$L = \{w \mid w \text{ \textit{содержит подслово 001 или подслово 110}}\}.$$

2. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$?

$$L = \{a^n cb^m \mid m > 3n\}.$$

Ответ обоснуйте.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает гомоморфный образ $\psi(L)$ языка L из задачи 1 при гомоморфизме $\psi : \{0, 1\}^* \to \{a, b\}^*$, заданном равенствами: $\psi(0) = aa, \psi(1) = aba$.

4. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает конкатенацию языка L из задачи 1 с языком $L' = \{w \mid w$ *содержит нечетное число единиц* $\}$.

Вариант 2

1. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.

$$L = \{w \mid w \text{ \textit{начинается с 0 и не содержит подслово 00}}\}.$$

2. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$?

$$L = \{wcw^{-1} \mid w = a^2 b^n a \text{ \textit{для некоторого} } n > 0\}$$

Ответ обоснуйте.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает пересечение языка L из задачи 1 с языком $L' = \{w \mid w$ *содержит четное число единиц* $\}$.

4. Пусть L — конечно автоматный язык в алфавите $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$, а $L_1, \ldots, L_m$ — это конечно автоматные языки в алфавите Δ. Доказать, что конечно автоматным является и язык ЗАМ(L), полученный из слов L заменой каждой буквы a_i на некоторое слово из L_i, т.е. ЗАМ$(L) = \{w \mid$ *существует такое слово* $u = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \in L$ *и такие слова* $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Delta^*$, *что* $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ *и* $w_j \in L_{i_j}$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots n\}$.

Вариант 3

1. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.

$L = \{w \mid$ *в* w *единицы встречаются блоками четной длины и хоть один такой блок единиц имеется* $\}$.

2. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$?

$$L = \{wcw^{-1} \mid w = ba^2 ba^n b \text{ \textit{для некоторого} } n > 0\}$$

Ответ обоснуйте.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает объединение языка L из задачи 1 с языком $L' = \{w \mid w$ *содержит четное число нулей* $\}$.

4. Пусть L — конечно автоматный язык в алфавите Σ. Доказать, что конечно автоматным является и язык КОР$(L) = \{w \mid$ *существуют такие слова* $x, y \in \Sigma^*$, *что* $xwy \in L\}$.

МОДУЛЬ 2

Вариант 1

1. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+1)!, & \text{если } \log_2(x+1) > y \\ x+y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать, что следующая функция является примитивно рекурсивной:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-2y|, & \text{если } x \le 2y+2 \\ x^y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

3. Пусть структурированная программа Π вычисляет в переменной y некоторую всюду определенную взаимно однозначную функцию $f(x)$, область значений которой совпадает с множеством всех натуральных чисел $\mathbf{N}$. Постройте структурированную программу, которая вычисляет обратную функцию $f^{-1}(x) = \{z \mid f(z) = x\}$.

4. Пусть $F(x)$ задана соотношениями $F(0) = 1,\ F(1) = 2,\ F(x+2) = F(x-1) + F(x)$ (элементы последовательности $F(x)$ называются числами Фиббоначчи). Покажите, что функция F^1 примитивно рекурсивна.
(Указание: покажите сначала, что функция $g(x) = 2^{F(x)}3^{F(x+1)}$ примитивно рекурсивна.)

Вариант 2

1. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{[x/2]}, & \text{если } 2x > y \\ (y+x)^2, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

2. Доказать, что следующая функция является примитивно рекурсивной:

$$f(x,y) = \begin{cases} [\log_3 y], & \text{если } 2x \ge y \\ y^2 - x^2, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

3. Функция $A^2(x,y)$ определяется следующими соотношениями:
$A(0,y) = y+1$,
$A(x+1,0) = A(x,1)$,
$A(x+1,y+1) = xA(x+1,y)$.
Постройте структурированную программу, вычисляющую функцию $A(x,y)$.

4. Докажите, что если значения общерекурсивной функции $f(x)$ изменить на конечном множестве, то получившаяся функция $f'(x)$ также будет общерекурсивной.

МОДУЛЬ 3

Вариант 1

1. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{(y+1)} + y^{(x+1)}, & \text{если } x > y+1 \\ 2 * y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и обосновать правильность построения (исходные данные и результаты в унарном кодировании).

2. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной структурированной программе Π определить является ли вычисляемая ею функция $\Phi_{\Pi,y}(x)$ монотонной, т.е. выполнено ли для всех x неравенство $\Phi_{\Pi,y}(x) < \Phi_{\Pi,y}(x+1)$.

Вариант 2

1. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x^2 - y|, & \text{если } x \neq y+2 \\ y!, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и обосновать правильность построения (исходные данные и результаты в унарном кодировании).

2. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной структурированной программе Π определить является ли множество значений вычисляемой ею функции $\Phi_{\Pi,y}(x)$ бесконечным.

Вариант 3

1. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} [\log_3(1 + \lfloor \frac{x}{y} \rfloor)\ ], & \text{если } x > y^2 \\ xy, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и обосновать правильность построения (исходные данные и результаты в унарном кодировании).

2. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной паре структурированных программ Π и Π' проверить, что для всех x имеет место неравенство $\Phi_{\Pi,y}(x) > \Phi_{\Pi',y}(x)$.