1 Подсистемы

Подмножество алгебраической системы *замкнуто относительно некоторой операции*, определенной на основном множестве этой системы, если из того, что какие-то аргументы лежат в этом подмножестве, следует, что и значение рассматриваемой операции на этом наборе аргументов лежит в этом подмножестве. В частности, для константы это означает, что рассматриваемое подмножество содержит значение этой константы.

Операции, соответствующие сигнатурным символам операций в рассматриваемой алгебраической системе, называются *основными операциями* этой алгебраической системы. При этом элементы, соответствующие сигнатурным константам, называются также выделенными элементами этой алгебраической системы.

Определение 1 (подалгебры, подсистемы)**.** *Непустое подмножество алгебры называется подалгеброй, если оно замкнуто относительно всех основных операций этой алгебры. Непустое подмножество алгебраической системы называется подсистемой, если оно замкнуто относительно всех основных операций этой системы.*

Если сигнатура не содержит символов операций, всякое непустое подмножество является подсистемой. В общем же случае всегда существует наименьшая подсистема, содержащая заданное непустое подмножество основного множества рассматриваемой алгебраической системы. Эта подсистема определяется как пересечение всех подсистем, содержащих рассматриваемое подмножество, и называется *подсистемой, порожденной этим подмножеством.* Для понимания корректности этого определения достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пересечение любого множества подсистем, содержащих заданное непустое подмножество рассматриваемой алгебраической системы, является подсистемой этой системы.*

Доказательство. Если какой-то набор элементов принадлежат пересечению, то этот набор принадлежат каждой подсистеме. Значит, значение некоторой основной операции на этом наборе принадлежит каждой подсистеме и потому принадлежит пересечению всех рассматриваемых подсистем. □

Пусть теперь множество A конечно, а $\mathcal{A}$ является алгебраической системой, у которой A является основным множеством. Пусть X является непустым подмножеством множества A. Тогда следующая конструкция строит подсистему, порождённую X в $\mathcal{A}$.

Теорема 1.2 (о порожденной подсистеме конечной системы)**.** *Пусть R_0 — пусто, а R_{i+1} содержит те и только те элементы x из A, которые либо входят в X, либо являются выделенными элементами в $\mathcal{A}$, либо для которых существуют n, такая n-местная основная операция f в $\mathcal{A}$ и такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ из R_i, что $x = f(a_1, \ldots, a_n)$.*

Существует такое i, что $R_i = R_{i+1}$. Для этого i множество R_i является подсистемой, порожденной X в $\mathcal{A}$.

Доказательство. Индукцией по j докажем, что $R_j \subseteq R_{j+1}$.

Это верно для $j = 0$, так как R_0 является пустым.

Если $R_j \subseteq R_{j+1}$, то $R_{j+1} \subseteq R_{j+2}$.

Так как $R_j \subseteq R_{j+1}$ для любого j, то последовательность

$$R_0,\ R_1, \ldots, R_j, \ldots$$

является неубывающей последовательностью подмножеств конечного множества A. По этой причине существует такое i, что $R_i = R_{i+1}$. Для этого i и любого j выполняется равенство

$$R_i = R_{i+j}.$$

Покажем, что R_i является подсистемой, порожденной X в $\mathcal{A}$.

Ясно, что R_j содержится в этой подсистеме для любого j.

Действительно, это верно для $j = 0$ в силу пустоты R_0. Пусть T является подсистемой, порожденной X, и R_j содержится в T. Покажем, что R_{j+1} тоже содержится в T. Действительно, $R_{j+1}(a)$ эквивалентно существованию такого n и таких $a_1, \ldots, a_n$ в R_j, что либо a является выделенным элементом или элементом X, либо $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторой основной n-местной операции f. Если выполняется первая возможность, $a \in T$ по определению подсистемы, порожденной X. Пусть выполняется вторая возможность. По индукционному предположению и определению подсистемы, $a \in T$.

Покажем, что $T \subseteq R_i$. По определению, T является пересечением всех подсистем, содержащих X. Остается заметить, что R_i является подсистемой.

R_i содержит все выделенные элементы $\mathcal{A}$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ содержатся в R_i и f является n-местной основной операцией.

Тогда $f(a_1, \ldots, a_n)$ лежит в $R_{i+1} = R_i$.

Итак, $R_i = T$. $\square$

В общем случае (без предположения о конечности $\mathcal{A}$) имеет место следующая теорема. Мы называем состояние σ алгебраической системы $\mathcal{A}$ состоянием над X, если это состояние σ каждой переменной присваивает значение, лежащее в X.

Теорема 1.3 (о порождённой подсистеме)**.** *Пусть $|\mathcal{A}|$ — это основное множество алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры L, далее кратко называемой L-системой. Пусть X — непустое подмножество множества $|\mathcal{A}|$. Подсистема $[X]_{\mathcal{A}}$, порождённая множеством X в $\mathcal{A}$, — это множество V значений всех L-термов для всех состояний над X рассматриваемой L-системы $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $a \in [X]_{\mathcal{A}}$. Это означает, что a принадлежит любой подсистеме, содержащей X. Чтобы доказать, что $a \in V$, достаточно доказать, что V является подсистемой.

Если c — выделенный элемент, значение c в $\mathcal{A}$ лежит в V по определению, так как это значение есть $\sigma(c)$ для любого состояния σ.

Пусть f — это символ сигнатурной операции местности n. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ взяты из V. По определению, для $i = 1, \ldots, n$ каждое b_i равно $\sigma_i(t_i)$ для некоторого L-терма t_i и некоторого состояния σ_i над X для L-системы $\mathcal{A}$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что для различных i и j из $\{1, \ldots, n\}$, термы t_i и t_j не содержат общих переменных. Действительно, если переменная x встречается одновременно в t_i и в t_j, мы выберем новую переменную z так, чтобы $t_1, \ldots, t_n$ не содержали z, заменим x на z в t_i и положим $\sigma_i(z) = \sigma_i(x)$. При сделанном предположении для x, входящем в t_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, положим $\sigma(x) = \sigma_i(x)$. Если же переменная x не входит ни в один из термов t_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, положим $\sigma(x) = \sigma_1(x)$. Теперь σ является состоянием над X и

$$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) =$$

$$f^{\mathcal{A}}(\sigma_1(t_1), \ldots, \sigma_n(t_n)) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Это доказывает, что $f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ лежит в V.

При этом мы использовали равенство $\sigma(t_i) = \sigma_i(t_i)$. Это равенство легко доказывается индукцией по числу символов операций в t_i. По определению σ, это равенство верно для переменных, входящих в t_i. Если t_i есть $g(s_1, \ldots, s_k)$, то

$$\sigma(g(s_1, \ldots, s_k)) = g^{\mathcal{A}}(\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_k)) =$$

$$g^{\mathcal{A}}(\sigma_i(s_1), \ldots, \sigma_i(s_k)) = \sigma_i(g(s_1, \ldots, s_k)).$$

Это означает, что V замкнуто относительно сигнатурных операций и, значит, является подсистемой.

Докажем обратное утверждение. Пусть $a \in V$. Это означает, что a является значением некоторого L-терма для некоторого состояния над X для $\mathcal{A}$. Используя индукцию по числу i символов операций в этом терме, докажем, что $a \in [X]_{\mathcal{A}}$. Достаточно доказать, что a лежит в каждой подсистеме, содержащей X.

Если $i = 0$, рассматриваемый терм является переменной и его значение лежит в X по определению состояния над X. Если же этот терм является выделенным элементом c, то a есть $c^{\mathcal{A}}$ и a лежит в любой подсистеме системы $\mathcal{A}$ по определению подсистемы. Если a является значением терма t и t есть $f(t_1, \ldots, t_n)$, то a есть $f^{\mathcal{A}}(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$, где σ — это некоторое состояние над X. По индукционному предположению, $b_i = \sigma(t_i) \in [X]_{\mathcal{A}}$ для $i = 1, \ldots, n$. Так как $[X]_{\mathcal{A}}$ замкнуто относительно каждой сигнатурной операции, $a = f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in [X]_{\mathcal{A}}$. $\square$

Для простоты ограничимся случаем, когда сигнатура L не содержит символов операций. Пусть E — отношение конгруэнтности для L-системы $\mathcal{A}$. Фактор-система системы $\mathcal{A}$ по отношению E является L-системой и определяется следующим образом. Основное множество этой фактор-системы является множеством всех классов эквивалентности для E. Для каждого сигнатурного символа отношения P местности n и любых $a_1,\ldots, a_n$ из $|\mathcal{A}|$ включение $(a_1/E,\ldots,a_n/E) \in P^{\mathcal{A}/E}$ имеет место тогда и только тогда, когда $(a_1,\ldots,a_n) \in P^{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A}/E$ есть фактор-система системы $\mathcal{A}$ по отношению E и a/E — класс эквивалентности по отношению E, содержащий a, для $a \in |\mathcal{A}|$.

Корректность этого определения следует из определения отношения конгруэнтности.

Лемма 1.4. *Пусть Φ_1 получается из замкнутой L-формулы Φ заменой каждой подформулы $t_1 = t_2$ на $E(t_1,t_2)$ для каждых L-термов t_1 и t_2. Тогда символ равенства $=$ не входит в Φ_1 и Φ_1 является $\langle L, E^{(2)}\rangle$-формулой. Предположим ещё, что E не входит в L и $E^{\mathcal{A}}$ — это некоторое отношение конгруэнтности для L-системы $\mathcal{A}$. Тогда*

$\mathcal{A}/E^{\mathcal{A}} \models \Phi$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{A}, E^{\mathcal{A}}) \models \Phi_1$.

Доказательство. Индукцией по числу пропозициональных связок и кванторов в L-формуле Ψ, доказываем для любого состояния s для $(\mathcal{A}, E^{\mathcal{A}})$, что

$$s/E^{\mathcal{A}} \models \Psi \text{ тогда и только тогда, когда } s \models \Psi_1, \tag{1}$$

где $s/E^{\mathcal{A}}(x) = (s(x))/E^{\mathcal{A}}$ для каждой переменной x и Ψ_1 получается из L-формулы Ψ заменой $t_1 = t_2$ на $E(t_1,t_2)$ для каждых L-термов t_1 и t_2.

Для атомных формул Ψ условие (1) следует из определения фактор-системы по отношению конгруэнтности E. Если (1) верно для двух формул, то (1) верно для их дизъюнкции и конъюнкции. Если (1) верно для некоторой формулы, то (1) верно и для отрицания этой формулы. Осталось проверить, что если (1) верно для формулы Ψ, то (1) верно и для $(\exists x)\Psi$.

Для доказательства справедливость условия (1) для $(\exists x)\Psi$ достаточно доказать, что

$$s_1/E^{\mathcal{A}} \models \Psi \text{ тогда и только тогда, когда } s_1 \models \Psi_1,$$

где $s_1/E^{\mathcal{A}}(x) = (s_1(x))/E^{\mathcal{A}}$ для каждой переменной x, для некоторого такого состояния s_1 для $(\mathcal{A}, E^{\mathcal{A}})$, что $s_1(y) = s(y)$ для любой переменной y, отличной от x. Но это прямо следует из индукционного предположения. $\square$

2 Определения

Напомним определение машины Тьюринга.

Машина Тьюринга имеет одну бесконечную вправо ленту и конечный входной алфавит, символы которого написаны в ячейках ленты по одному в каждой ячейке. Перед началом работы лента представляет входное слово. Это слово конечно. Другими словами, имеется конечна часть ленты, вне которой все ячейки заполнены «пустым» символом. Ячейки (иначе клетки) ленты занумерованы натуральными числами. Имеется клетка номера 0, номера 1 и так далее.

Каждая машина Тьюринга имеет конечное число состояний. В каждый момент времени (на каждом шаге своей работы) машина Тьюринга находится в одном из своих состояний и только в одном состоянии. В каждый момент машина Тьюринга обозревает одну и только одну из своих клеток. В обозреваемой клетке записан обозреваемый этой машиной Тьюринга в этот момент символ.

В первый момент машина обозревает нулевую ячейку в начальном состоянии.

Правило (команда) машины Тьюринга в зависимости от обозреваемого символа и состояния этой машины указывает, что будет записано в обозреваемой ячейке в следующий момент, подвинется ли машина на одну клетку влево или вправо или останется на месте и каким будет новое состояние.

Если машина обозревает нулевую ячейку и должна подвинуться влево, то она ломается. Если новое состояние окажется заключительным, машина остановится. Иначе она продолжит свою работу согласно своим правилам.

После этого неформального описания представим формальные определения.

Определение 2. *Машина Тьюринга (коротко, ТМ) M — это последовательность следующих объектов:*

- *конечный (или входной, или внешний) алфавит Σ, содержащий так называемый «пустой» символ $\wedge$ и, по крайней мере, ещё один символ, например, $|$,*
- *такой конечный алфавит Q состояний (или внутренний), что*
$$(Q \cap \Sigma) = \emptyset,$$
- *начальное состояние $q_1 \in Q$ и заключительное состояние $! \notin (Q \cup \Sigma)$,*
- *отображение M из $(\Sigma \times Q)$ в $(\Sigma \times \{L, R, C\} \times (Q \cup \{!\}))$.*

Символы из $\{L, R, C\})$ задают направление движения. L означает «влево», R означает «вправо» и C означает «стоять на месте».

Каждую машину Тьюринга M можно представлять себе как таблицу с $|\Sigma|$ столбцами, помеченными элементами алфавита Σ, и $|Q|$ строками, помеченными состояниями из Q, где $|A|$ обозначает число элементов конечного множества A. В этой таблице клетка, расположенная в столбце, помеченном s, и в строке, помеченной q, содержит $M(s, q)$. Во всех случаях мы предполагаем, что начальное состояние метит первую строку.

Например, следующая таблица

Right$_*$	$\wedge$	$\vert$	$*$	1	2	3
q	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1
q_1	R	R	!	R	R	R

представляет машину Тьюринга с шестью входными символами $\wedge$, $|$, $*$, 1, 2 и 3, начальным состоянием q и ещё одним состоянием q_1.

В представлении машины Тьюринга как таблицы в клетках мы обычно опускаем новое состояние, если оно не отличается от рассматриваемого, новый печатаемый символ, если он не отличается от обозреваемого, и направление движения, если оно означает «стоять на месте».

Следовательно, в этом примере таблица на самом деле должна быть следующей:

Right$_*$	$\wedge$	$\vert$	$*$	1	2	3
q	$\wedge Rq_1$	$\vert Rq_1$	$*Rq_1$	$1Rq_1$	$2Rq_1$	$3Rq_1$
q_1	$\wedge Rq_1$	$\vert Rq_1$	*C!	$1Rq_1$	$2Rq_1$	$3Rq_1$

Слово в алфавите D определяется обычным образом. Каждая буква из D является словом в алфавите D. Символ λ пустого слова является словом в алфавите D. Если a и b — слова в алфавите D, то ab также является словом в алфавите D. D^* обозначает множество всех слов в алфавите D.

Для описания работы машины Тьюринга мы нуждаемся в символе для обозначения конца ленты. Мы используем h в качестве такого символа и предполагаем, что $h \notin (\Sigma \cup Q \cup \{!\})$.

Машина Тьюринга преобразует слово в алфавите $(\Sigma \cup Q \cup \{h, !\})$ в слово этого алфавита.

Определение 3. *Словом Поста (коротко, PW) для ТМ M с алфавитом состояний Q и входным алфавитом Σ является слово вида $ArsBh$, где A и B — это слова в алфавите Σ, r лежит в $Q \bigcup \{!\}$, а s лежит в Σ. Возможно, что A или B пусто, либо оба из них являются пустыми словами. Но последний символ слова B отличен от $\wedge$. Если r является начальным состоянием, то слово Поста называется начальным. Если r является заключительным состоянием, слово Поста называется заключительным.*

Машина Тьюринга преобразует слова Поста в слова Поста.

Определение 4. *Зафиксируем входной алфавит Σ. Пусть M является ТМ с алфавитом Q состояний и Π является словом Поста для M.*

Если Π является заключительным PW, то $M(\Pi)$ есть Π.

Пусть Π есть $ArsBh$, где r лежит в Q.

Случай 1. $M(s, r) = s'Lr'$, A есть A_1a, s' не является пустым символом, а лежит в Σ, A_1 принадлежит Σ^*.

Тогда $M(\Pi)$ есть $A_1r'as'Bh$.

Случай 2. $M(s, r) = s'Lr'$, A является пустым словом.

Then $M(\Pi)$ не определено. Мы говорим, что машина Тьюринга в этот момент ломается.

Случай 3. $M(s,r) = \wedge Lr'$, *A есть* $A_1 a$, *a лежит в* Σ, A_1 *лежит в* Σ^*, *B не является пустым словом.*

Тогда $M(\Pi)$ *есть* $A_1 r' a \wedge Bh$.

Случай 4. $M(s,r) = \wedge Lr'$, *A есть* $A_1 a$, *a лежит в* Σ, A_1 *лежит в* Σ^*, *B является пустым словом.*

Then $M(\Pi)$ *is* $A_1 r' ah$.

Случай 5. $M(s,r) = s'Rr'$, *B есть* bB_1, *b лежит в* Σ, B_1 *лежит в* Σ^*.

Тогда $M(\Pi)$ *есть* $As'r'bB_1h$.

Случай 6. $M(s,r) = s'Rr'$, *B является пустым словом.*

Тогда $M(\Pi)$ *есть* $As'r' \wedge h$.

Случай 7. $M(s,r) = s'Cr'$.

Тогда $M(\Pi)$ *есть* $Ar's'Bh$.

Если $M(\Pi)$ *определено, мы скажем, что* M *преобразует слово Поста* Π *в* $M(\Pi)$ *за один шаг, и пишем:* $\Pi \Longrightarrow_M^1 M(\Pi)$. *Если* $\Pi \Longrightarrow_M^1 \Pi_1$ *и* $\Pi_1 \Longrightarrow_M^n \Pi_2$, *то* $\Pi \Longrightarrow_M^{n+1} \Pi_2$. $\Pi \Longrightarrow_M^+ \Pi_1$ *означает, что для некоторого положительного натурального числа* i *выполняется* $\Pi \Longrightarrow_M^i \Pi_1$. *В этом случае мы говорим, что* M *преобразует* Π *в* Π_1. $\Pi \Longrightarrow_M^* \Pi_1$ *означает, что либо* $\Pi \Longrightarrow_M^+ \Pi_1$, *либо* Π_1 *есть* Π.

Грубо говоря, хотя лента бесконечна, но множество непустых ячеек конечно в первый момент и остается конечным всегда. Эта ситуация и описывается словами Поста.

В любой момент обозревается одна ячейка. R означает, что происходит сдвиг вправо на одну ячейку, L означает, что происходит движение влево на одну ячейку, C означает, что не происходит никакого движения. Слово Поста является конкатенацией слова на ленте, расположенного до обозреваемой ячейки, состояния, обозреваемого символа (содержимого обозреваемой ячейки) и слова, расположенного после обозреваемого символа до последнего непустого символа включительно.

Обозреваемый символ заменяется на символ, определяемый правилом машины для пары (обозреваемый символ, состояние). Затем происходит движение согласно этому правилу. Наконец, машина приходит в новое состояние согласно этому правилу. В первый момент состоянием является начальное состояние.

Для получения следующего слова Поста нам иногда требуется добавить справа новый пустой символ или наоборот отбросить последний пустой символ.

Пример 1. Рассмотрим снова TM Right_*.

Right_* имеет два состояния q и q_1. Во второй строке все клетки, кроме клетки в столбце, помеченном $*$, есть R. Клетка в столбце, помеченном $*$, есть !. В первой строке, помеченной начальным состоянием q, все клетки есть Rq_1.

Рассмотрим PW $\Pi_0 = q \wedge | * 1 | | * h$ для Right_*.

Так как $\mathrm{Right}_*(\wedge, q)$ есть $\wedge Rq_1$, имеет место случай 5, в котором B есть $| * 1 | | *$.

ТМ Right_* преобразует Π_0 в $\Pi_1 = \text{Right}_*(\Pi_0)$, которое, по определению для случая 5, есть $\wedge q_1 | * 1 | | * h$.

Так как $\text{Right}_*(|, q_1)$ есть $| R q_1$, имеет место случай 5, в котором A есть $\wedge$ и B есть $*1||*$.

По определению для случая 5, Π_1 преобразуется в Π_2, которое есть

$$\wedge | q_1 * 1 | | * h.$$

Так как $\text{Right}_*(*, q_1)$ есть $*C!$, PW Π_2 преобразуется в $\wedge | ! * 1 | | * h$.

Итак,

$$q \wedge | * 1 | | * h \Longrightarrow^3_{\text{Right}_*} \wedge | ! * 1 | | * h.$$

PW $\wedge | ! * 1 | | * h$ является заключительным.

Пример 2. Рассмотрим ТМ

Bad	$\wedge$	$\vert$	$*$	1	2	3
q	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1	Rq_1
q_1	R	L	!	R	R	R

Рассмотрим PW $\Pi_0 = q \wedge | * 1 | | * h$ для Bad.

Так как $\text{Bad}(\wedge, q)$ есть $\wedge R q_1$, имеет место случай 5, в котором B есть $| * 1 | | *$.

ТМ Bad преобразует Π_0 в $\Pi_1 = \text{Bad}(\Pi_0)$, которое есть, по определению для случая 5, $\wedge q_1 | * 1 | | * h$.

Так как $\text{Bad}(|, q_1)$ есть $| L q_1$, случай 1 имеет место, в котором A есть $\wedge$, and B есть $*1||*$.

По определению для случая 1, Π_1 преобразуется в Π_2, которое есть $q_1 \wedge | * 1 | | * h$.

Так как $\text{Bad}(\wedge, q_1)$ есть $\wedge R q_1$, PW Π_2 преобразуется в $\wedge q_1 | * 1 | | * h$, которое снова есть Π_1.

Итак,

$$\Pi_0 \Longrightarrow^n_{\text{Bad}} \Pi_i,$$

где i есть остаток при делении на 2 от $n > 0$. Очевидно, что начиная от Π_0, МТ Bad никогда не прийдёт в заключительное состояние. В таких случаях мы будем говорить, что МТ Bad не останавливается.

Определение 5. *Пусть* Π_0 *— начальное слово Поста для ТМ* M. M *останавливается на* Π_0 *тогда и только тогда, когда существуют такое заключительное слово Поста* Π_1 *для* M *и такое положительное натуральное число* n, *что*

$$\Pi_0 \Longrightarrow^n_M \Pi_1.$$

Упражнение 1. *Для любого целого положительного числа* n *отображение* f *из подмножества* X *множества*

$$\omega^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \omega\}$$

во множество ω натуральных чисел называется **арифметической функцией** *местности n. X называется* **областью определения** *функции f и обозначается как $DOM(f)$. ТМ M* **вычисляет** *арифметическую функцию f местности n, если для любого начального слова Поста $q \wedge |^{a_1} * \cdots * |^{a_n} * h$, где $a_1, \ldots,\ a_n \in \omega$, машина M останавливается на этом слове Поста тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots,\ a_n) \in DOM(f)$ и, если M останавливается на этом слове Поста, то найдётся такое положительное натуральное число n, что*

$$q \wedge |^{a_1} * \cdots * |^{a_n} * h \Longrightarrow_M^n ! \wedge |^{f(a_1, \ldots,\ a_n)} * h.$$

Если $f(a_1, \ldots,\ a_n) = 0$, это заключительное слово Поста есть $!\wedge * h$. Арифметическая функция называется **вычислимой**, *если существует машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию.*

Построить машины Тьюринга, вычисляющие сложение, умножение и другие подобные арифметические функции. Например, построить машину Тьюринга, вычисляющую для любых натуральных чисел $n > 0$ and $m > 1$ такое натуральное число i, что m^i делит n (существует такое натуральное число k, что $n = k \times m^i$), но m^{i+1} не делит n.

Напомним теперь определения номера машины Тьюринга и номера слова Поста для этой машины. Мы будем рассматривать такие машины Тьюринга, входной алфавит которых есть $E = \{\wedge,\ |,\ *,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Определение 6. *Символам $\wedge$, $|$, $*$, 1, 2, 3 приписываем номера 0, 1, 2, 3, 4, 5. Пустому слову приписываем номер 1. Слову $a_0 \ldots a_n$ в алфавите E приписываем номер*

$$\prod_{i=0}^{n} p(i)^{\zeta(a_i)},$$

где $\zeta(a_i)$ обозначает номер символа a_i, а $p(i)$ по-прежнему обозначает i-ое по порядку простое число.

Обращением пустого слова является пустое слово. Обращением слова Aa является слово aA^*, где A^* — обращение слова A.

Например, слово $|| * |*$ имеет номер $2 * 3 * 5^2 * 7 * 11^2$. Обращением этого слова является слово $*| * ||$.

Определение 7. *Символу $!$ приписываем номер 0. Если Q — алфавит состояний МТ M, начальному состоянию приписываем номер 1, а остальным состояниям номера от 2 до m, где m — число элементов Q. Слову Поста $ArsBh$ для M приписываем номер $2^{n_1} * 3^{n_2} * 5^{n_3} * 7^{n_4}$, где n_1 — номер обращения слова A, значит, номер слова, получаемого из слова A, если последний его символ сделать первым, предпоследний — вторым и т.д., n_2 — номер состояния r, n_3 — номер символа s из E, n_4 — номер слова B.*

Заметим, что номер слова не изменится, если к нему в конце приписать любую последовательность пустых символов, так как пустой символ имеет номер 0.

Определение 8. *Пусть M — МТ с множеством состояний Q. Пусть m — число элементов Q.*

Номером тройки $\langle s, O, q\rangle$ назовем число

$$2^{n_1} * 3^{n_2} * 5^{n_3},$$

где n_1 — номер первого элемента этой тройки, n_3 — номер третьего элемента этой тройки, $n_2 = 0$, если второй элемент тройки есть C, $n_2 = 1$, если второй элемент тройки есть L, $n_2 = 2$, если второй элемент тройки есть R.

Если s имеет номер i, $0 \leq i \leq 5$, а q имеет номер j, $1 \leq j \leq m$, то номер тройки $M(s, q)$ обозначается через $\zeta_M(i, j)$.

Пусть $\zeta_M(j)$ есть

$$\prod_{i=0}^{5} p(i)^{\zeta_M(i,j)},$$

а ζ_M есть

$$\prod_{j=1}^{m} p(j)^{\zeta_M(j)}.$$

Число $\zeta_M(j)$ называется номером j-той строки МТ M, а число ζ_M — номером МТ M.

Пример 3.

Рассмотрим МТ Пра$_*$, описанную в примере 1. Здесь q имеет номер 1, а q_1 — номер 2. Первая строка имеет 6 клеток с номерами $2^0 * 3^2 * 5^2$, $2^1 * 3^2 * 5^2$, $2^2 * 3^2 * 5^2$, $2^3 * 3^2 * 5^2$, $2^4 * 3^2 * 5^2$, $2^5 * 3^2 * 5^2$, которые равны 225, 450, 900, 1800, 3600, 7200. Поэтому номер первой строки равен

$$2^{225} * 3^{450} * 5^{900} * 7^{1800} * 11^{3600} * 13^{7200}.$$

Вторая строка имеет 6 клеток с номерами $2^0 * 3^2 * 5^2$, $2^1 * 3^2 * 5^2$, $2^2 * 3^0 * 5^0$, $2^3 * 3^2 * 5^2$, $2^4 * 3^2 * 5^2$, $2^5 * 3^2 * 5^2$, которые равны 225, 450, 4, 1800, 3600, 7200. Поэтому номер второй строки — это

$$2^{225} * 3^{450} * 5^4 * 7^{1800} * 11^{3600} * 13^{7200}.$$

Номер же Пра$_*$ — это $3^{n_1} * 5^{n_2}$, где n_1 — номер первой строки, а n_2 — номер второй строки.

Теорема 2.1. *Пусть M — МТ с начальным состоянием q. Существует такая рекурсивная функция ζ_n от n аргументов, что для любого набора $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ натуральных чисел $\zeta_n(a_1, \ldots, a_n)$ есть номер начального слова Поста $q \wedge |^{a_1} * \cdots * |^{a_n} * h$.*

Доказательство. Индукцией по n. Будем использовать обычные обозначения для простейших функций.

Базис индукции, $n = 1$. В этом случае рассматриваемое PW есть $q\wedge|^{a_1}*h$ и его номер есть $2*3*7^{\psi_1(a_1)}$, где $\psi_1(a)$ есть

$$(\prod_{i=0}^{a-1} p(i))*(p(a))^2,$$

если $a > 0$, и $\psi_1(0) = 4$. Другими словами,

$$\psi_1(a) = sg(a)*(\prod_{i=0}^{a\frown 1} p(i))*(p(a)^2)+4*\overline{sg}(a).$$

Рекурсивность ψ_1 следует из рекурсивности $\prod_{i=0}^{z} p(i)$, которая легко доказывается, если использовать теорему об ограниченном перемножении. Действительно, если $p'(x,y) = p(y)$, то $p' = [p;\ \eta_2^2]$. Далее, $p''(x,z) = \prod_{i=0}^{z} p'(x,i)$ рекурсивна. Наконец,

$$\psi_1(a) = [+;\ [*;\ [*;\ sg,\ [p'';\ \eta_1^1, [(-\ :);\ \eta_1^1]]], [*;\ p,\ p]],\ [*;\ 4,\ \overline{sg}]](a).$$

Индукционный шаг. Пусть $\zeta_n(a_1,\ldots,a_n)$ — рекурсивная функция. Тогда

$$\zeta_{n+1}(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) = 2*3*7^{\psi_{n+1}(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})},$$

где $\psi_{n+1}(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ — номер слова $|^{a_1}*\cdots*|^{a_n}*|^{a_{n+1}}*$. Если $\psi_n(a_1,\ldots,a_n)$ — номер слова $|^{a_1}*\cdots*|^{a_n}*$, то $\psi_n = [exp;\ \zeta_n, [';[';[';[\theta;\eta_n^n]]]]$ и, значит, рекурсивна. Однако

$$\psi_{n+1}(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) = \psi_n(a_1,\ldots,a_n)*(\prod_{i=a_1+\cdots+a_n+n+1}^{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+n} p(i))*$$
$$p(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+n+1)*p(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+n+1).$$

□

Теорема 2.2. *Существует такая рекурсивная функция $\Theta(m,n)$, что если m — номер МТ, а n — номер незаключительного PW для этой МТ, для которого существует следующее PW, то $\Theta(m,n)$ — это номер PW, в которое МТ номера m перерабатывает PW номера n за один такт работы. Если же n — номер заключительного PW, то $\Theta(m,n) = n$.*

Доказательство. $exp(n,1)$ задает номер состояния, а $exp(n,2)$ задает номер обозреваемого символа. Поэтому $exp(exp(m,exp(n,1)),exp(n,2))$ задает номер тройки, стоящей на пересечении строки номера $exp(n,1)$ и столбца номера $exp(n,2)$ в МТ номера m.

Обозначим через $J_{i+1}(m,n)$ число $exp(exp(exp(m,exp(n,1)),exp(n,2)),i)$ для $i = 0,1,2$. Рассмотрим отдельно три случая, в зависимости от того, равно ли $J_2(m,n)$ числу 0, 1 или 2.

Случай 1. $J_2(m,n) = 2$. В этом случае происходит движение вправо. Значит, если n — номер слова Поста $ArsBh$, то новым обозреваемым символом будет первый символ B, если B непусто, или пустой символ, если B пусто. Новое слово B получится из старого отбрасыванием первой буквы. Поэтому номер нового слова B равен

$$\Theta_1(m,n) = \prod_{i=0}^{exp(n,3)} p(i)^{exp(exp(n,3),i+1)}.$$

Новое слово A получается приписыванием к A в конце символа с номером $J_1(m,n)$. Поэтому номер обращения нового слова A есть:

$$\Theta_2(m,n) = 2^{J_1(m,n)} * \prod_{i=1}^{exp(n,0)} p(i)^{exp(exp(n,0),(-:)(i))}.$$

Окончательно, номер нового слова Поста, получающегося из PW номера n за один такт работы МТ номера m, есть

$$\Theta_3(m,n) = 2^{\Theta_2(m,n)} * 3^{J_3(m,n)} * 5^{exp(exp(n,3),0)} * 7^{\Theta_1(m,n)}.$$

Случай 2. $J_2(m,n) = 1$. Рассматривается аналогично. В этом случае происходит движение влево. Обращение нового слова A имеет номер:

$$\Theta_4(m,n) = \prod_{i=0}^{exp(n,0)} p(i)^{exp(exp(n,0),i+1)}.$$

Новое слово B имеет номер:

$$\Theta_5(m,n) = 2^{J_1(m,n)} * \prod_{i=1}^{exp(n,3)} p(i)^{exp(exp(n,3),(-:)(i))}.$$

Окончательно, номер PW, в которое МТ номера m перерабатывает PW номера n, есть

$$\Theta_6(m,n) = 2^{\Theta_4(m,n)} * 3^{J_3(m,n)} * 5^{exp(exp(n,0),0)} * 7^{\Theta_5(m,n)}.$$

Случай 3. $J_2(m,n) = 0$. В этом случае движения не происходит. Поэтому A и B не меняются. Значит, номер PW, в которое МТ номера m перерабатывает PW номера n, есть

$$\Theta_7(m,n) = 2^{exp(n,0)} * 3^{J_3(m,n)} * 5^{J_1(m,n)} * 7^{exp(n,3)}.$$

Итак, получаем, что $\Theta(m,n)$ надо положить $\Theta_3(m,n)$, если $|J_2(m,n) - 2| = 0$, положить $\Theta_6(m,n)$, если $|J_2(m,n) - 1| = 0$, положить $\Theta_7(m,n)$, если $J_2(m,n) = 0$, и положить n в остальных случаях. По теореме о разборе случаев, такая $\Theta(m,n)$ будет рекурсивной.

Заметим, что если $exp(n,1) = 0$, то $exp(m, exp(n,1)) = 0$. Поэтому, $J_1(m,n) = J_2(m,n) = J_3(m,n) = 0$. Следовательно, если МТ номера m останавливается, то $\Theta(m,n) = n$. $\square$

Теорема 2.3. *Существует такая рекурсивная функция* $\Theta_8(m,n,i)$, *что если* m *— номер МТ, а* n *— номер PW для МТ номера* m, *то* $\Theta_8(m,n,i)$ *задает номер PW, в которое МТ номера* m *перерабатывает PW номера* n *за* i *тактов работы.*

Доказательство. Надо положить $\Theta_8(m,n,0) = n$ и $\Theta_8(m,n,i+1) = \Theta(m,\Theta_8(m,n,i))$. □

Теорема 2.4. *Каждая арифметическая функция, вычисляемая некоторой МТ, является частично рекурсивной.*

Доказательство. Пусть МТ M имеет номер m и вычисляет n-местную арифметическую функцию ϕ. Тогда

$$exp(\Theta_8(m,\zeta_n(a_1,\dots,a_n),i),1) = 0$$

тогда и только тогда, когда МТ M переводит начальное PW номера $\zeta_n(a_1,\dots,a_n)$ в заключительное слово Поста.

Обозначим через $\Theta_9(m,a_1,\dots,a_n)$ наименьшее из таких i, что

$$exp(\Theta_8(m,\zeta_n(a_1,\dots,a_n),i),1) = 0.$$

Ясно,что функция Θ_9 частично рекурсивна. $\Theta_9(m,a_1,\dots,a_n)$ определено тогда и только тогда, когда $\phi(a_1,\dots,a_n)$ определено. Понятно, что

$$\Theta_8(m,\zeta_n(a_1,\dots,a_n),\Theta_9(m,a_1,\dots,a_n))$$

задает номер заключительного PW. Это PW имеет вид

$$! \wedge |^{f(a_1,\dots,a_n)} * h.$$

Обозначим через $\Theta_{10}(m,a_1,\dots,a_n)$ число

$$exp(\Theta_8(m,\zeta_n(a_1,\dots,a_n),\Theta_9(m,a_1,\dots,a_n)),3).$$

Ясно, что Θ_{10} — частично рекурсивная функция и $\Theta_{10}(m,a_1,\dots,a_n)$ есть номер слова $|^{\phi(a_1,\dots,a_n)} *$. Теперь $\phi(a_1,\dots,a_n)$ есть наименьшее i, что $exp(\Theta_{10}(m,a_1,\dots,a_n),i) = 2$. Функция

$$\Theta_{11} = M[| - |;\ [exp;\ [\Theta_{10};\ \eta_1^{n+2},\ \eta_2^{n+2},\dots,\eta_{n+1}^{n+2}],\eta_{n+2}^{n+2}],\ [';\ [';\ [\theta;\ \eta_1^{n+2}]]]]$$

частично рекурсивна и

$$\phi(a_1,\dots,a_n) = \Theta_{11}(m,a_1,\dots,a_n),$$

если $\phi(a_1,\dots,a_n)$ определено. □

Теорема 2.5. *Не существует ТМ* M, *удовлетворяющей условиям:*

- *если* n *— номер ТМ* A, *которая останавливается на своём начальном PW* $q \wedge |^n * h$, M *переводит своё начальное PW* $q \wedge |^n * h$ *в заключительное PW* $! \wedge | * h$;

- *если же n — номер ТМ A, которая не останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$, M переводит своё начальное PW $q \wedge |^n * h$ в заключительное PW $! \wedge * h$.*

Доказательство. Пусть Σ — входной алфавит рассматриваемых машин Тьюринга. Предположим, что M — такая машина Тьюринга. Усовершенствуем M для получения новой машины Тьюринга N следующим образом. N имеет два дополнительных состояния r и r'. Заменим заключительное состояние на состояние r во всех правилах машины M, включив полученные правила и все неизменённые правила машины M в правила машины N, и добавим правила $N(\wedge, r) = (\wedge, R, r)$, $N(*, r) = (*, C, !)$, $N(|, r) = (|, R, r')$ и $N(s, r') = (s, R, r')$ для всех $s \in \Sigma$. Таким образом, если q является состоянием машины M и $s \in \Sigma$, то $N(s, q) = M(s, q)$, если $M(s, q)$ не является заключительным состоянием. Если же $M(s, q)$ является заключительным состоянием, то $N(s, q) = r$. Не имеет значения, как работает N в неописанных случаях.

Итак, если n — номер ТМ A, которая останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, машина N переходит в состояние r', после чего никогда не останавливается. Если же n — номер ТМ A, которая не останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, машина N обозревает $*$ в состоянии r и останавливается.

Пусть m — это номер машины N.

Если N останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^m * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^m * h$, машина N переходит в состояние r', после чего никогда не останавливается. Противоречие.

Если же N не останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^m * h$, то машина N обозревает $*$ в состоянии r и останавливается. Опять противоречие. $\square$

PW $q \wedge h$, в котором q является начальным состоянием, называется *пустым начальным словом Поста.* Мы скажем, что машина Тьюринга M останавливается на своём номере, если n — номер ТМ A и машина A останавливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$.

Теорема 2.6. *Не существует машины Тьюринга M, удовлетворяющей условиям:*

- *если n — номер ТМ A, которая останавливается на своём пустом начальном PW, M переводит своё начальное PW $q \wedge |^n * h$ в заключительное PW $! \wedge | * h$;*

- *если же n — номер ТМ A, которая не останавливается на своём пустом начальном PW, M переводит своё начальное PW $q \wedge |^n * h$ в заключительное PW $! \wedge * h$.*

Не совсем формальное доказательство. Имея номер ТМ A, мы вычислим номер новой ТМ B, работающей на начальном пустом слове Поста следующим образом. Эта новая машина сначала пишет на ленте номер машины A, а затем начинает работать как машина A.

Таким образом, машина B останавливается на начальном пустом слове Поста тогда и только тогда, когда машина Тьюринга A останавливается на своём номере.

Мы предлагаем читателю написать программу такой машины Тьюринга M_0, которая по номеру A вычисляет номер B.

Если бы существовала ТМ M, удовлетворяющая условиям теоремы, композиция (последовательное выполнение) M_0 и M удовлетворяло бы условиям теоремы 2.5.

Для получения нужной композиции, предполагая, что машины M_0 и M не имеют общих состояний, заменим в программе машины M_0 заключительное состояние на начальное состояние машины M во всех правилах машины M_0 и к полученным преобразованным правилам машины M_0 добавим все правила машины M. □

Определение 9. *Зафиксируем входной алфавит Σ. Рассмотрим множество $\mathfrak{U}$ слов алфавита $(\Sigma \backslash \{\wedge\})$. Это множество называется рекурсивным, если существует такая ТМ M, что для любого $A \in (\Sigma \setminus \{\wedge\})^*$ машина M останавливается на начальном слове Поста $q \wedge Ah$, обозревая в момент остановки $\wedge$, если $A \in \mathfrak{U}$, и машина M останавливается на этом PW $q \wedge Ah$, обозревая в момент остановки входной символ, отличный от $\wedge$, если $A \notin \mathfrak{U}$.*

Кортеж $(n_1, \ldots, n_k)$ натуральных чисел мы будем изображать словом $|^{n_1} * \cdots * |^{n_k} *$ в алфавите $\{|, *\}$.

Обычно говорят, что существует алгоритм для определения принадлежности слова алфавита $(\Sigma \backslash \{\wedge\})$ множеству $\mathfrak{U}$, если $\mathfrak{U}$ является рекурсивным.

Пример 4. Натуральные числа представляются словами в алфавите $\{|, *\}$. Пусть $\Sigma = \{\wedge, |, *\}$. Множество чётных чисел рекурсивно. Действительно, рассмотрим следующую ТМ

Even	$\vert$	$\wedge$	$*$
q	Rq_1	Rq_1	Rq_1
q_1	Rq_2	Rq_1	$R!$
q_2	Rq_1	Rq_1	$!$

Even преобразует $q \wedge |^i * h$ в $\wedge |^i *! \wedge h$, если i чётно.

Even преобразует $q \wedge |^i * h$ в $\wedge |^i ! * h$, если i нечётно. Поэтому Even всегда останавливается. Эта машина останавливается, обозревая $\wedge$, тогда и только тогда, когда i чётно.

Упражнение 2. *Для любого целого положительного числа n отображение f из подмножества X множества*

$$\omega^n = \{(a_1, \ldots,\ a_n) \mid a_1, \ldots,\ a_n \in \omega\}$$

во множество ω натуральных чисел называется **арифметической функцией** *местности n. X называется* **областью определения** *функции f и обозначается как $DOM(f)$. Множеством значений $IM(f)$ арифметической функции f является множество $\{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in DOM(f)\}$. Привести пример частично рекурсивной функции, у которой и область определения, и множество значений не являются рекурсивными.*

Начиная работать на своём начальном пустом слове Поста, произвольная машина Тьюринга последовательно обозревает некоторые ячейки. Если множество всех обозреваемых во время работы этой машины ячеек конечно, эта ТМ называется *зацикливающейся.* Если ТМ M останавливается на своём начальном пустом слове Поста, то очевидно, что M является зацикливающейся.

Начиная работать на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, где n — номер ТМ A, произвольная машина Тьюринга A последовательно обозревает некоторые ячейки. Если множество всех обозреваемых во время этой работы этой машины ячеек конечно, эта ТМ называется *зацикливающейся на своём номере* или на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$. Если ТМ M останавливается на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, где n — номер ТМ A, то очевидно, что M является зацикливающейся на своём номере.

Теоремы 2.6 и 2.5 имеют следующие аналоги.

Теорема 2.7. *Не существует ТМ M, удовлетворяющей условиям:*

- *если n — номер ТМ A, которая зацикливается на своём начальном $PW\, q \wedge |^n * h$, то M переводит своё начальное $PW\, q \wedge |^n * h$ в заключительное $PW\, ! \wedge | * h$;*
- *если же n — номер ТМ A, которая не зацикливается на своём начальном $PW\, q \wedge |^n * h$, то M переводит своё начальное $PW\, q \wedge |^n * h$ в заключительное $PW\, ! \wedge * h$.*

Доказательство. Пусть Σ — входной алфавит рассматриваемых машин Тьюринга. Предположим, что M — такая машина Тьюринга. Усовершенствуем M для получения новой машины Тьюринга N следующим образом. N имеет два дополнительных состояния r и r'. Заменим заключительное состояние на состояние r во всех правилах машины M, включив полученные правила и все неизменённые правила машины M в правила машины N, и добавим правила $N(\wedge, r) = (\wedge, R, r)$, $N(*, r) = (*, C, !)$, $N(|, r) = (|, R, r')$ и $N(s, r') = (s, R, r')$ для всех $s \in \Sigma$. Таким образом, если q является состоянием машины M и $s \in \Sigma$, то $N(s, q) = M(s, q)$, если $M(s, q)$ не является заключительным состоянием. Если же $M(s, q)$ является заключительным состоянием, то $N(s, q) = r$. Не имеет значения, как работает N в неописанных случаях.

Итак, если n — номер ТМ A, которая зацикливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, машина N переходит в состояние r', после чего никогда не останавливается, посещая всё новые и новые ячейки справа. Если же n — номер ТМ A, которая не зацикливается на своём начальном PW $q \wedge |^n * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^n * h$, машина N обозревает $*$ в состоянии r и останавливается.

Пусть m — это номер машины N.

Если N зацикливается на своём начальном PW $q \wedge |^m * h$, то, начиная на своём начальном слове Поста $q \wedge |^m * h$, машина N переходит в состояние r', после чего никогда не останавливается, посещая всё новые и новые ячейки справа. Противоречие.

Если же N не зацикливается на своём начальном PW $q \wedge |^m * h$, то машина N обозревает $*$ в состоянии r и останавливается. Опять противоречие. □

Теорема 2.8. *Множество* Cyclic *номеров всех зацикливающихся машин Тьюринга не является рекурсивным.*

Не совсем формальное доказательство. Имея номер TM A, мы вычислим номер новой TM B, работающей на начальном пустом слове Поста следующим образом. Эта новая машина сначала пишет на ленте номер машины A, а затем начинает работать как машина A.

Таким образом, машина B зацикливается на начальном пустом слове Поста тогда и только тогда, когда машина Тьюринга A зацикливается на своём номере.

Мы предлагаем читателю написать программу такой машины Тьюринга M_0, которая по номеру A вычисляет номер B.

Если бы существовала TM M, удовлетворяющая условиям теоремы, композиция (последовательное выполнение) M_0 и M удовлетворяло бы условиям теоремы 2.7.

Для получения нужной композиции, предполагая, что машины M_0 и M не имеют общих состояний, заменим в программе машины M_0 заключительное состояние на начальное состояние машины M во всех правилах машины M_0 и к полученным преобразованным правилам машины M_0 добавим все правила машины M. □

3 Теорема Трахтенброта

Замкнутую формулу иногда называют *высказыванием.* Формулу сигнатуры L называют L-формулой. Алгебраическую систему сигнатуры L называют L-системой. L-высказывание называется конечно истинным, если это высказывание истинно в каждой конечной L-системе. L-высказывание называется конечно выполнимым, если это высказывание истинно в некоторой конечной L-системе.

Теорема 3.1 (Трахтенброт)**.** *Множество всех конечно истинных высказываний не является рекурсивным.*

Эта теорема непосредственно следует из

Теорема 3.2. *Множество всех конечно выполнимых высказываний не является рекурсивным.*

Действительно, L-высказывание является конечно истинным тогда и только тогда, когда его отрицание ложно в каждой конечной L-системе.

Доказательство. Излагаемое здесь доказательство является модификацией известного доказательства Бьюхи. Это доказательство совершенно прозрачно, но, к сожалению, несколько громоздко из-за множества мелких деталей.

Вкратце, идея состоит в следующем. Мы используем теорему 2.8.

Для заданной машины Тьюринга мы строим замкнутую формулу, описывающую работу этой машины на пустом начальном слове Поста. Если эта ТМ лежит в Cyclic, построенная формула оказывается конечно выполнимой. Если же построенная формула конечно выполнима, то рассматриваемая машина Тьюринга лежит в Cyclic.

Если бы теорема 3.2 была ложна, мы могли бы проверить, является ли построенная формула конечно выполнимой, и, значит, проверить, является ли заданная машина Тьюринга зацикливающейся. А это бы противоречило теореме 2.8.

Рассмотрим (зафиксированную для фиксированного входного алфавита Σ!) сигнатуру

$$\mathcal{T} = \left\langle P, \bar{S}, Q, L, R, C, 0, ' < \right\rangle .$$

Мы рассматриваем такие $\mathcal{T}$-системы, основное множество которых является множеством натуральных чисел и в которых $'$ интерпретируется как функция следования (как прибавление единицы).

В этих $\mathcal{T}$-системах бинарное отношение P задаёт номер обозреваемой ячейки в момент m следующим образом: $P(m,k)$ истинно тогда и только тогда, когда k-ая ячейка ленты обозревается на m-ом шаге работы на пустом начальном слове Поста заданной машины Тьюринга.

Бинарное отношение Q задаёт состояние машины Тьюринга следующим образом: $Q(m,k)$ означает, что k является состоянием заданной машины Тьюринга на m-ом шаге работы на пустом начальном слове Поста, предполагая, что 0 является заключительным состоянием и 1 является начальным состоянием.

Последовательность бинарных отношений $\bar{S}(m,k)$ задаёт символ, записанный в k-ой ячейке ленты на m-ом шаге работы на пустом начальном слове Поста заданной машины Тьюринга. Для определённости, $S_s(m,k)$ означает, что перед началом m-ого шага работы заданной машины Тьюринга на пустом начальном слове Поста символ s записан в k-ой ячейке.

Наконец, унарные отношения L, R и C описывают направление движения на рассматриваемом шаге работы заданной машины Тьюринга на пустом начальном слове Поста.

Формула, которая строится для заданной машины Тьюринга, состоит из трёх частей. Первая часть описывает начальное пустое слово Поста. Она утверждает, что во всех ячейках сначала записан $\wedge$, обозревается нулевая ячейка и машина находится в первом состоянии. Вторая часть описывает общие правила работы машин Тьюринга и то, что эта машина никогда не ломается. Третья часть описывает, используя программу заданной машины Тьюринга, как происходит переход от i-ого шага работы к $(i+1)$-ому шагу.

Построенная формула оказывается конечно выполнимой тогда и только тогда, когда заданная ТМ лежит в Cyclic.

Ключевым моментом доказательства является доказательство того, что построенная формула имеет модель тогда и только тогда, когда эта формула имеет модель, основное множество которой является множеством натуральных чисел, а операция $'$ интерпретируется в этой модели как функция следования (как прибавление единицы). Далее мы рассматриваем только такие модели и вводим понятие периодической модели.

Оказывается, что рассматриваемая ТМ лежит в Cyclic тогда и только тогда, когда построенная формула имеет периодическую модель.

Важным оказывается заключительное утверждение, что построенная формула имеет периодическую модель тогда и только тогда, когда она имеет конечную модель.

Теперь время перейти к деталям.

Формула, описывающая начальное пустое слово Поста, далее называемая начальной аксиомой:

$$(P(0,0) \wedge \neg P(0,y\,') \wedge Q(0,0\,') \wedge S_\wedge(0,y)).$$

Эта формула говорит, что в начальный момент обозревается нулевая ячейка, машина имеет начальное состояние и все ячейки содержат пустой символ.

Правила работы машины описывают формулы, называемые аксиомами свойст и движения.

Аксиомы свойств имеют вид:

- $$(\bigwedge_{s\in\Sigma}(S_s(x,y) \to \bigwedge_{d\in(\Sigma\setminus\{s\})} \neg S_d(x,y))\wedge$$
  $$\bigwedge_{s\in\Sigma}(\neg P(x,y) \to (S_s(x,y) \leftrightarrow S_s(x',y)))).$$

  Здесь $\Phi \leftrightarrow \Psi$ является сокращением для

  $$((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Phi)).$$

  Эта формула утверждает, что в каждый момент в каждой ячейке записан только один символ и что, если ячейка не обозревается, то в следующий момент эта ячейка содержит тот же самый символ.

- $$\bigwedge_{i=0}^{q}(Q(x,i) \to \bigwedge_{j\in\{0,1,\ldots,q\},\ j\neq i} \neg Q(x,j)),$$

  где q — это число состояний рассматриваемой машины Тьюринга. Эта формула утверждает, что в любой момент машина находится только в одном состоянии.

Аксиома движения имеет вид:

$$((L(x) \to (P(x,y') \leftrightarrow P(x',y)))\wedge$$
$$(R(x) \to (P(x',y') \leftrightarrow P(x,y)))\wedge$$
$$(C(x) \to (P(x',y) \leftrightarrow P(x,y)))).$$

Эта формула утверждает, что

- если рассматриваемая машина Тьюринга движется влево, то номер следующей обозреваемой ячейки уменьшается на 1;
- если рассматриваемая машина Тьюринга движется вправо, то номер следующей обозреваемой ячейки увеличивается на 1;
- если рассматриваемая машина Тьюринга стоит на месте, то номер следующей обозреваемой ячейки не изменяется.

Формула, описывающая переход к следующему шагу работы, называется аксиомой перехода.

Аксиома перехода от x-ого шага к $(x+1)$-ому шагу работы машины Тьюринга M имеет вид:

$$(\bigwedge_{M(s,i)=(d,L,j)} ((S_s(x,y) \wedge P(x,y) \wedge Q(x,i)) \to (Q(x',j) \wedge L(x) \wedge S_d(x',y)))\wedge$$
$$\bigwedge_{M(s,i)=(d,R,j)} ((S_s(x,y) \wedge P(x,y) \wedge Q(x,i)) \to (Q(x',j) \wedge R(x) \wedge S_d(x',y)))\wedge$$
$$\bigwedge_{M(s,i)=(d,C,j)} ((S_s(x,y) \wedge P(x,y) \wedge Q(x,i)) \to (Q(x',j) \wedge C(x) \wedge S_d(x',y))).$$

Эта формула утверждает, что следующее состояние, следующее содержимое обозреваемой ячейки и следующая обозреваемая ячейка определяются соответствующим правилом заданной машины Тьюринга.

Для целей, которые станут понятными позже, мы нуждаемся в некоторой небольшой корректировке аксиом движения и перехода.

Добавим новый бинарный символ отношения H и заменим $P(x,y')$ на $H(x,y)$, а $P(x',y')$ на $H(x',y)$ в аксиоме перехода и в аксиоме движения. Формулу, полученную такой заменой из аксиомы перехода, назовём откорректированной аксиомой перехода. Формулу, полученную такой заменой из аксиомы движения, назовём откорректированной аксиомой движения.

Нам нужно также немного откорректировать начальную аксиому. В ней мы заменим $P(0,y')$ на $H(0,y)$. Заметим, что после этой корректировки, как и до неё, начальная аксиома не содержит вхождений x. Заменим 0 на x в откорректированной начальной аксиоме и получим формулу $\phi(x,x',y)$. Формулу $(Z(x) \to \phi(x,x',y))$ назовём новой начальной аксиомой.

Пусть $\Psi(x,x',y)$ обозначает конъюнкцию новой начальной аксиомы, аксиом свойств, откорректированной аксиомы перехода, откорректированной аксиомы движения и формул $(H(y,x) \leftrightarrow P(y,x'))$ и $\neg Z(x')$. Пусть $\Phi(0)$ есть $(Z(0) \wedge (\forall x)(\forall y)\Psi(x,x',y))$. В частности, $\Phi(0)$ утверждает, что $Z(x')$ ложно для любого x. Так как $Z(0)$ истинно, это означает, что 0 отлично от x' для любого x.

Кроме того, если основное множество модели формулы $\Phi(0)$ является множеством натуральных чисел и операция $'$ задаёт следующее натуральное число, то $Z(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $x = 0$, и аксиомы начальная, свойств, перехода и движения выполняются для любых значений переменных.

Легко доказать индукцией по шагу работы программы, что если основное множество модели формулы $\Phi(0)$ является множеством натуральных чисел, операция $'$ задаёт следующее натуральное число, а машина Тьюринга работает на начальном пустом слове Поста, то выполняются следующие условия:

- $Q(m,k)$ истинно тогда и только тогда, когда k есть состояние рассматриваемой машины Тьюринга на шаге m,
- $P(m,k)$ истинно тогда и только тогда, когда k есть номер обозреваемой ячейки рассматриваемой машины Тьюринга на шаге m,
- последовательность бинарных отношений $\bar{S}(m,k)$ задаёт символ, записанный в ячейке номера k перед выполнением шага m.

Наоборот, если эти условия выполнены, унарные отношения L, R и C задают движение головки рассматриваемой машины Тьюринга на шаге m, выполнены условия

- если рассматриваемая машина Тьюринга движется влево, то номер следующей обозреваемой ячейки уменьшается на 1;
- если рассматриваемая машина Тьюринга движется вправо, то номер следующей обозреваемой ячейки увеличивается на 1;
- если рассматриваемая машина Тьюринга стоит на месте, то номер следующей обозреваемой ячейки не изменяется,

а также истинны формулы $(H(y,x) \leftrightarrow P(y,x'))$, $\neg Z(x')$ и $Z(0)$ для любых значений переменных, то формула $\Phi(0)$ истинна в системе рассматриваемой сигнатуры, основное множество которой является множеством натуральных чисел и операция $'$ в которой задаёт следующее натуральное число.

Это доказываает, что высказывание

$$(\Phi(0) \wedge (\forall y)(\forall x)(Z(y) \to \neg(L(x) \wedge P(x,y))))$$

истинно в системе $(\omega, \ ', 0, P, H, \bar{S}, Q, Z, L, R, C)$, в которой $'$ and 0 имеют обычную интерпретацию, при некоторой интерпретации $P, H, \bar{S}, Q, Z, L, R, C$ тогда и только тогда, когда рассматриваемая машина Тьюринга, работая на начальном пустом слове Поста, не ломается.

Осталось доказать, что это высказывание конечно выполнимо тогда и только тогда, когда рассматриваемая машина Тьюринга является зацикливающейся.

В самом деле, если рассматриваемая машина Тьюринга лежит в Cyclic, то это высказывание имеет модель $(\omega, \,', 0, P, H, \bar{S}, Q, Z, L, R, C)$, в которой $'$ и 0 имеют обычную интерпретацию и существуют такие натуральные числа m и n , что для любого бинарного сигнатурного отношения U и любых натуральных чисел $a > m$ и $b > m$ выполняются условия:

- $(a, b) \in U$ тогда и только тогда, когда $(a + n, b) \in U$,
- $(a, b) \in U$ тогда и только тогда, когда $(a, b + n) \in U$,

и для любого унарного сигнатурного отношения U и любого натурального числа $a > m$ выполняется условие:

- $a \in U$ тогда и только тогда, когда $a + n \in U$.

Это означает, что бинарное отношение E, задаваемое правилом

$$((x \leqslant m \vee y \leqslant m) \wedge x = y) \vee (x > m \wedge y > m \wedge x - y = 0 \text{ modulo } n)),$$

является конгруэнтностью. При этом число классов эквивалентности конечно, а это высказывание не содержит равенства. По лемме 1.4, это высказывание выполняется и в фактор-системе по отношению E, которая конечна.

Для завершения доказательства теоремы Трахтенброта осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3.3. *Если высказывание*

$$(\Phi(0) \wedge (\forall y)(\forall x)(Z(y) \to \neg(L(x) \wedge P(x, y)))) \tag{2}$$

имеет модель, то оно имеет модель $(\omega, \,', 0, P, H, \bar{S}, Q, Z, L, R, C)$*, в которой* $'$ *и* 0 *имеют обычную интерпретацию.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную модель этого высказывания. Рассмотрим подсистему $\mathfrak{C}$ этой модели, порождённую $\{0\}$. По теореме 1.3, основное множество этой подсистемы $\mathfrak{C}$ имеет вид $\{0, 0\,', 0\,'', \dots\}$. Так как формула

$$(Z(y) \to \neg(L(x) \wedge P(x, y)))$$

истинна для любых значений переменных модели, то она тем более истинна для всех значений переменных, взятых из множества $\{0, 0\,', 0\,'', \dots\}$. Это означает, что высказывание (2) истинно в рассматриваемой подсистеме $\mathfrak{C}$. Если рассматриваемая подсистема $\mathfrak{C}$ бесконечна, то её обеднение до сигнатуры $\langle ', 0\rangle$ изоморфно $(\omega, \,', 0)$. Это нам и нужно.

Во всех случаях имеется эпиморфизм τ из $(\omega, \,', 0)$ на указанное обеднение, при котором $\tau(0) = 0$. Для каждого сигнатурного символа U бинарного отношения и любых натуральных чисел a и b полагаем $U(a, b)$ истинным в $(\omega, \,', 0)$ тогда и только тогда, когда $U(\tau(a), \tau(b))$ истинно в системе $\mathfrak{C}$.

Кроме того, для каждого сигнатурного символа U унарного отношения и любого натурального числа a полагаем $U(a)$ истинным в $(\omega, \ ', 0)$ тогда и только тогда, когда $U(\tau(a))$ истинно в системе $\mathfrak{C}$. Таким образом мы построим систему $\mathfrak{B} = (\omega, \ ', 0, P, H, \bar{S}, Q, Z, L, R, C)$. Отношение E, задаваемое на множестве ω правилом:

для любых натуральных чисел x и y тогда и только тогда $E(x, y)$, когда $\tau(x) = \tau(y)$,

является отношением конгруэнтности для системы $\mathfrak{B}$. Понятно, что система $\mathfrak{C}$ является фактор-системой системы $\mathfrak{B}$ по отношению конгруэнтности E. Так как высказывание (2) не содержит равенства, из леммы 1.4 следует, что это высказывание, истинное по доказанному в фактор-системе $\mathfrak{C}$, истинно и системе $\mathfrak{B}$. □

□

Теорема 3.4. *Пусть $\Omega = \langle Q^{(3)} \rangle$. Множество конечно истинных Ω-высказываний не является рекурсивным.*

Набросок доказательства. Мы доказали теорему 3.2 для некоторой фиксированной сигнатуры, содержащей унарные и бинарные символы отношений и символ унарной операции. Символ унарной операции можно заменить на новый символ бинарного отношения. Затем можно ввести символ тернарного отношения R и интерпретировать $R(a, u, v)$ или $R(a, u, u)$ как $Q_a(u, v)$ или $Q_a(u)$ в зависимости от числа аргументных мест a-ого сигнатурного символа Q_a. Эти соображения позволяют доказать теорему 3.2 для случая, когда сигнатура состоит из одного тернарного символа отношения. □

Примечание 1. В предлагаемом доказательстве не использовался символ равенства. Следовательно, мы доказали версию теоремы Трахтенброта и теоремы 3.2 для формул, не использующих символ равенства.

Примечание 2. Наше доказательство, как и первоначальное доказательство Б.А.Трахтенброта, датированное 1949 годом и использующее другие соображения, использует сложную сигнатуру. Однако Р.Л.Воот в 1960 году привёл доказательство для случая сигнатуры, состоящей из одного бинарного символа отношения.

Примечание 3. Имеется много усилений теоремы 3.2 в различных направлениях. А.И.Мальцев предложил изучать такого рода теоремы для различных аксиоматизируемых теорий (различных классов групп, колец и тому подобное). Хао Ван, Бьюхи, Ю.Ш.Гуревич и другие изучали справедливость такого рода теорем для различных классов формул.

Упражнение 3. *Доказать для сигнатуры $L = \langle Q^{(2)} \rangle$, что множество всех конечно истинных L-высказываний не является рекурсивным. Это множество называется элементарной теорией всех конечных графов.*

Указание: Рассмотреть две сигнатуры $L_3 = \langle Q^{(3)} \rangle$ и $L_2 = \langle R^{(2)} \rangle$. Рассмотрим L_3-систему $\mathcal{A}$. Пусть A — это основное множество $\mathcal{A}$. Для любых таких $a, b, c \in A$, что $Q^{\mathcal{A}}(a, b, c)$, добавить новые элементы $d(a, b, c)$, $d_1(a, b, c)$, $d_2(a, b, c)$, $d_3(a, b, c)$ и положить

$$R(d(a,b,c), d(a,b,c)),\ R(d_1(a,b,c), d_1(a,b,c)),$$

$$R(d_2(a,b,c), d_2(a,b,c)),\ R(d_3(a,b,c), d_3(a,b,c)),$$

$$R(a, d(a,b,c)),\ R(b, d_1(a,b,c)),\ R(c, d_2(a,b,c)),$$

$$R(d_1(a,b,c), d(a,b,c)),\ R(d_2(a,b,c), d_3(a,b,c)),\ R(d_3(a,b,c), d(a,b,c)).$$

Выбрать эти новые элементы попарно различными и различными для различных троек (a, b, c).

Упражнение 4. *Пусть $LO(<)$ обозначает конъюнкцию аксиом транзитивности, антисимметричности и тотальности. Доказать, что высказывание*

$$((LO(<) \wedge (\exists x)(\forall y) y \leqslant x) \vee \neg LO(<))$$

конечно истинно. Является ли это высказывание тождественно истинным?

Упражнение 5. *Доказать, что высказывание*

$$(\exists x)(\forall y)(\exists z)((P(y,z) \to P(x,z)) \to (P(x,x) \to P(y,x)))$$

конечно истинно, но не тождественно истинно.

Упражнение 6. *Доказать, что элементарная теория всех конечных симметричных графов не является рекурсивной.*

Упражнение 7. *Доказать, что элементарная теория всех конечных рефлексивных графов не является рекурсивной.*

Упражнение 8. *Доказать, что элементарная теория всех конечных транзитивных графов не является рекурсивной.*

Упражнение 9. *Доказать, что элементарная теория натуральных чисел вместе с унарной операцией следования (прибавления единицы) рекурсивна.*

Упражнение 10. *Элементарная теория натуральных чисел с бинарной операцией $+$ сложения и бинарным отношением $<$ называется* **арифметикой Пресбургера.** *Доказать, что арифметика Пресбургера рекурсивна.*

Предметный указатель