$>h)$. Таким образом эквива-

как $X$ совершенно нормаль-
ществует $f \in C(X)$ , такая,
. Действительно, пусть
$f = h + u$ . Отсюда по-
эквивалентность, что любой
решетки можно сопоставить фор-
у $h$ , такую, что
$(X) \models \varphi$.
получаем, что
$L(\;) \models \varphi$,
ремы.

атура


i G., First order Topol y,
,1975,preprint.



УДК.519.49 М.А.Тайцлин


# ПРОБЛЕМА ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП РЕШАЕТСЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО

В [1] , [2] , [3] , [4] , [5] была разработана система понятий для описания устройства конечно порожденных коммутативных полугрупп.

В [5] (лемма 7) сформулированы необходимые и достаточные условия изоморфизма двух конечно порожденных коммутативных полугрупп. В [5] (теорема 1) показано, что по конечным множествам определяющих соотношений для таких двух полугрупп $A$ и $B$ можно эффективно построить конечное число систем матричных уравнений $\mathfrak{Y}_i$ $(i=1,\dots,m)$ и конечное число систем матричных сравнений $\mathfrak{A}_{ij}$ $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,\ell_i)$ по модулю $m_i$ так, что заданные полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда для некоторых $i \in \{1,\dots,m\}$ и $j \in \{1,\dots,\ell_i\}$ имеет целочисленное и целочисленно обратимое решение система $\mathfrak{Y}_i \cup \mathfrak{A}_{ij}$.

В [5] (лемма 8) было замечено, что по каждой системе $\mathfrak{Y}_i \cup \mathfrak{A}_{ij}$ можно эффективно построить две такие конечные последовательности $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_q \rangle$ и $\langle \beta_1,\dots,\beta_q \rangle$ целочисленных и целочисленно обратимых матриц одного порядка $r$ , что система $\mathfrak{Y}_i \cup \mathfrak{A}_{ij}$ имеет целочисленное и целочисленно обратимое решение тогда и только тогда, когда существует такая целочисленная и целочисленно обратимая матрица $\Theta$ порядка $r$ , что $\alpha_i \Theta = \Theta \beta_i$ для $i = 1,\dots,q$ , другими словами, когда последовательности $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_q \rangle$ и $\langle \beta_1,\dots,\beta_q \rangle$ сопряжены.

Вопрос о существовании алгоритма, который по двум последовательностям одной длины целочисленных и целочисленно обратимых матриц одного порядка определяет, сопряжены ли эти последовательности, для нас оставался открытым.

В [5] было только показано, что из разрешимости проблемы изоморфизма для коммутативных полугрупп получался бы и положительный ответ на этот вопрос.

Вместе с тем Д.К.Фадеев еще в 1966 году в [6] установил необходимые и достаточные условия сопряженности двух последовательностей одной длины целочисленных и целочисленно обратимых матриц одного порядка. Недавно в [7] было замечено, что эти условия Д.К.Фаддеева в действительности эффективно прове емы.

Сопоставляя вместе сформулированные результаты из [5], [6] и [7], получаем.

<u>еорема I.</u> Проблема изоморфизма для ммутативных полугрупп решается положительно.

В [2] с каждой коммутативной полугруппой $A$, порождаемой множеством $X$, была связана сигнатура

$$\sigma(X) = \langle a, \sigma_a \mid a \in X \rangle,$$

где $\sigma_a$ для $a \in X$ – символ одноместного предиката. В [2] описан алгоритм, ко орый по множес ву образующих $X$ и определяющим соотношениям коммутативной полугруппы $A$ и по замкнутой формуле $\Phi$ логики предикатов первого рядка сигнатуры $\sigma(X)$ определяет, ис инна ли $\Phi$ в $A$.

Возникает

<u>Вопрос I</u>. Можно ли с парой коммутативных конечно определенных полугрупп, порождаемых множеством $X$, $A$ и $B$ эффективно связать замкнутую формулу $\Phi$ логики предикатов первого порядка сигнатуры $\sigma(X)$, что истинность $\Phi$ в $A$ равносильна изоморфности $A$ и $B$ ?

На связанный вопрос о том, будут ли всякие две конечно порожденные элементарно эквивалентные коммутативные полугруппы изоморфны, давно ответил отрицательно в [9] Б.И.Зильбер.

Интерес вопроса I теперь особенно велик, что если бы ответ был положителен, это давало бы элементарное решение проблемы сопряженности для последовательностей целочисленных и целочисленно обратимых матриц, не использующее глубоких сведений из теории чисел, которые Р.А.Саркисян использует в [7].

В тезисах [IO] нами было отмечено, что не существует алгоритма, который по системе линейных уравнений с одним неизвестным, коэффициенты которых – целочисленные и целочисленно обратимые матрицы одного порядка, определял бы, существует ли целочисленная и целочисленно обратимая матрица, являющаяся решением этой системы.

В связи с результатами Р.А.Саркисяна [7], [8] этот результат из [10] приобретает некоторый интерес, и мы изложим здесь его доказательство.

Через $\eta_{ij}$ для $i,j\in\{1,2,3,4\}$ обозначим матрицу порядка 4, у которой все элементы равны нулю, кроме стоящего одновременно в $i$ -ой строке и $j$ -м столбце, который равен I.

Произвольное диофантово уравнение эквивалентно системе уравнений видов

$$u+v=w, \qquad (1)$$
$$u\cdot v=w, \qquad (2)$$
$$u=0, \qquad (3)$$
$$u=1, \qquad (4)$$
$$u\cdot u=w, \qquad (5)$$
$$u+u=w. \qquad (6)$$

Рассмотрим произвольную систему Ю уравнений видов (I)-(6) и сопоставим ей систему $\mathfrak{A}$ уравнений видов

$$\alpha_1\Theta_1=\Theta_2\beta_1, \qquad (7)$$
$$\alpha_1\Theta_1\beta_1=\alpha_2\Theta_2\beta_2, \qquad (8)$$

где $\Theta_1,\Theta_2$ – переменные для квадратных целочисленных матриц порядка , а $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ – заданные квадратные матрицы порядка 4, при чем

$$\left.\begin{array}{l}\beta_2\in\{\eta_{ij},\eta_{31}+\eta_{41}\mid i\neq j;\ i,j=1,2,3,4\},\\ \alpha_1,\alpha_2,\beta_1\in\{\eta_{ij}\mid i\neq j;\ i,j=1,2,3,4\}.\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Через $(\Theta)_{ij}$ обозначим элемент, стоящий в матрице $\Theta$ на пересечении $i$ -ой строки и $j$ -ого столбца.

Пусть система Ю содержит $n$ уравнений.

Будем искать решения системы $\mathfrak{A}$ во множестве $GL(4,\mathbb{Z})$ всех целочисленных и целочисленно обратимых матриц порядка 4. Единичную матрицу в $GL(4,\mathbb{Z})$ обозначим через $1_4$ . Аналогично понимаем обозначения $GL(n,\mathbb{Z})$ и $1_n$ .

Заметим, что если $\Theta_1,\Theta_2\in GL(4,\mathbb{Z})$ , то

$$\eta_{ik}\cdot\Theta_1\cdot\eta_{\ell j}=\eta_{im}\cdot\Theta_2\cdot\eta_{pj}$$

тогда и только тогда, когда $(\Theta_1)_{k\ell}=(\Theta_2)_{mp}$ .

$i$ -ому уравнению системы Ю сопоставим переменную для матриц $\Theta_i$ . Будем рассматривать также переменную для матриц $\Theta_0$ . Список $\Theta_0,\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ состоит из всех переменных строящейся системы $\mathfrak{A}$ .

В систему $\mathfrak{A}$ мы включаем уравнения $\eta_{ij}\cdot\Theta_0=\Theta_0\cdot\eta_{ii}$

для $i,j\in\{1,2,3,4\}$, $i\neq j$.

Эти уравнения для $\Theta_0\in GL(4,\mathbb{Z})$ выполняются тогда и только тогда, когда $\Theta_0=1_4$ или $\Theta_0=-(1_4)$.

Если $i$-ое уравнение системы $Ю$ имеет вид (2), то хотим, чтобы матрица $\Theta_i$ имела вид

$$\begin{pmatrix} w & u & 1 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & w & u \\ 0 & 0 & v & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

если $\Theta_0=1_4$, и вид

$$\begin{pmatrix} w & u & -1 & 0 \\ v & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & w & u \\ 0 & 0 & v & -1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

если $\Theta_0=-(1_4)$.

Для этого достаточно выполнение условий

$(\Theta_i)_{11}=(\Theta_i)_{33}$, $(\Theta_i)_{12}=(\Theta_i)_{34}$, $(\Theta_i)_{21}=(\Theta_i)_{43}$,

$(\Theta_i)_{13}=(\Theta_i)_{22}=(\Theta_i)_{31}=(\Theta_i)_{\,} =(\Theta_0)_{11}$,

$(\Theta_i)_{14}=(\Theta_i)_{23}=(\Theta_i)_{24}=(\Theta_i)_{32}=(\Theta_i)_{41}=(\Theta_i)_{42}=(\Theta)_{12}$,

значит, это обеспечивается подходящими уравнениями видов

$$\eta_{qk}\cdot\Theta_i\cdot\eta_{lj}=\eta_{qm}\cdot\Theta_i\cdot\eta_{pj} \tag{12}$$

и

$$\eta_{qk}\cdot\Theta_i\,\eta_{lj}=\eta_{qm}\cdot\Theta_0\cdot\eta_{pj}, \tag{13}$$

которые мы включаем в систему $\mathfrak{A}$.

Если же $i$-ое уравнение имеет вид (5) то дополнительно надо, чтобы $(\Theta_i)_{12}=(\Theta_i)_{21}$ и, значит, надо дополнительно включить в $\mathfrak{A}$ уравнение

$$\eta_{41}\,\Theta_i\,\eta_{24}=\eta_{42}\cdot\Theta_i\cdot\eta_{14}.$$

Если $i$-ое уравнение имеет вид (1), то мы хотим, чтобы $\Theta_i$ имела вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u & v \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

если $\Theta_0=1_4$, и вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & u & v \\ 0 & -1 & 0 & w \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

если $\Theta_0=-(1_4)$, где $w=u+v$. Условие обеспечивается уравнением $\eta_{31}\cdot\Theta_i\cdot(\eta_{31}\cdot\eta_{41})=\eta_{32}\cdot\Theta_i\cdot\eta_{41}$, а условия (I4) или (I5) сводятся к равенствам между элементами $\theta_i$ или между элементами $\theta_i$ и $\theta_0$ и обеспечиваются включением в $\mathcal{S}$ подходящих уравнений видов (I2) или (I3).

Если $i$-ое уравнение имеет вид (3),(4) или (6), то надо дополнительно обеспечить равенства

$$(\theta_i)_{13}=(\theta_i)_{14}=(\theta_0)_{12},$$

или

$$(\theta_i)_{13}=(\theta_i)_{14}=(\theta_0)_{11},$$

или

$$(\theta_i)_{13}=(\theta_i)_{14},$$

для чего достаточно в $\mathcal{S}$ включить подходящие уравнения видов (I2) или (I3).

Если в $i$-ом и $j$-ом уравнении совпадают некоторые неизвестные, то это обеспечивается совпадением подходящих элементов матриц $\theta_i$ и $\theta_j$ и, значит, включением в $\mathcal{S}$ подходящих уравнений вида

$$\eta_{pz}\cdot\theta_i\cdot\eta_{mq}=\eta_{rz}\cdot\theta_j\cdot\eta_{sq}.$$

Если

$$\begin{vmatrix} w & u & 1 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & w & u \\ 0 & 0 & v & 1 \end{vmatrix}=\pm 1$$

а $u, v, w$ – целые числа, то $(w-uv)^2-1=\pm 1$ и, значит, $w=u\cdot v$. Наоборот, если $w=u\cdot v$, то имеет место (I6).

Это замечание показывает, что система $\mathcal{H}\mathcal{O}$ тогда и только тогда имеет целочисленное решение, когда система $\mathcal{S}$ имеет решение в $GL(4,\mathbb{Z})$.

По теореме Ю.В.Матиясевича, не существует алгоритма, который по системе уравнений видов (I)-(6) определял бы, имеет ли эта система целочисленное решение.

Итак, доказано.

<u>Теорема 2.</u> Не существует алгоритма, который по системе уравнений видов (7),(8), в которых $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ удовлетворяют (9), определял бы, имеет ли эта система решение в $GL(4,\mathbb{Z})$.

Пусть $\theta$ – клеточно диагональная квадратная матрица, по диагонали которой стоят $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$. У $\theta$, следовательно, $4(n+1)$ строк и столько же столбцов.

Преобразуем теперь систему $\mathcal{S}$. Уравнение $\alpha_1\theta_i=\theta_j\beta_1$

преобразуется к виду $\gamma_1\theta=\theta\gamma_2$, (I7)

если через $\gamma_1$ обозначить $[\alpha_1]_{ji}$, где $[\cdot]_{ij}$ – клеточно диагона ьная матрица, у которой все клетки, кроме $(i,j)$ -ой – нулевые, а $(i,j)$ -ая есть $\alpha$, а через $\gamma_2$ – $[\beta_1]_{ji}$.

Аналогично, уравнение

$$\alpha_1\theta_i\beta_1=\alpha_2\theta_j\beta_2$$

пре разуется к виду

$$\gamma_1\theta\gamma_3=\gamma_2\theta\gamma_4, \tag{I8}$$

если $\gamma_1$ эсть $[\alpha_1]_{ji}$, $\gamma_3$ есть $[\beta_1]_{ii}$, $\gamma_2$ есть $[\alpha_2]_{jj}$, $\gamma_4$ есть $[\beta_2]_{ji}$.

Условие клеточной диагональности для $\theta$ обеспечивается уравнением

$$\alpha\theta=\theta\alpha,$$

где $\alpha$ – клеточно диагональная матрица, і диагонали которой стоят $1_4, 2\cdot 1_4, \dots, (n+1)\cdot 1_4$.

Пусть $\varepsilon_1=1_{4(n+1)}+\gamma_1$, $\varepsilon_2=1_{4(n+1)}+\gamma_2$, $\varepsilon_3=1_{4(n+1)}+\gamma_3$, $\varepsilon_4=1_{4(n+1)}+\gamma_4$.

Ясно, что $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\in GL(4(n+1),\mathbb{Z})$.

Вместе с тем

$$\varepsilon_1\theta\varepsilon_3=\gamma_1\theta\gamma_3+\theta\gamma_3+\gamma_1\theta+\theta,$$

$$\varepsilon_2\theta\varepsilon_4=\gamma_2\theta\gamma_4+\theta\gamma_4+\gamma_2\theta+\theta.$$

Поэтому, уравнение (I ) преобразуется к виду

$$\varepsilon_1\theta=\theta\varepsilon_2, \tag{I9}$$

а уравнение (I8) – к виду

$$\varepsilon_1\theta\varepsilon_3+\theta\varepsilon_4+\varepsilon_2\theta=\varepsilon_2\theta\varepsilon_4+\theta\varepsilon_3+\varepsilon_1\theta. \tag{20}$$

Итак, доказана.

<u>Теорема 3.</u> Не существ ет алгоритма, который по заданному натуральному $n$ и системе уравнений видов (I9), (20) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\in GL(n,\mathbb{Z}))$ определял бы, имеет ли эта истема ре ие в $GL(n,\mathbb{Z})$.

## Л и т е р а т у р


1. Тайцлин М.А., Об элементарных теориях коммутативных полугрупп, Алгебра и логика, 5, №4, 1966, 55-89.
2. Тайцлин М.А., Об алгоритмических проблемах для коммутативных полугрупп, ДАН СССР, 178, №4, 1968, 786-789.
3. Тайцлин М.А., К проблеме изоморфизма для коммутативных полугрупп, Сиб.матем.ж., 9, №2, 1968, 375-401.
4. Тайцлин М.А., Эквивалентность автоматов относительно ком-

мутативной полугруппы, Алгебра и логика, 8,№5,1969,553-600.
5. Тайцлин М.А., О проблеме изоморфизма для коммутативных полугрупп, Матем.сб,93(135),№1, 1974,103-128.
6. Фаддеев Д.К., Об эквивалентности систем целочисленных матриц, Изв.АН СССР (сер.Математ.),30,№2, 1966,449-454.
7. Саркисян Р.А.,Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц, Матем.заметки, 25, №6, 1979, 811-824.
8. Саркисян Р.А., Когомологии Галуа и некоторые вопросы теории алгоритмов, Матем.сб, 111(153), №4, 1980, 579-609.
9. Зильбер Б.И., Об изоморфизме и элементарной эквивалентности коммутативных полугрупп, Алгебра и логика, 9, №6, 1970, 667-671.
10. Тайцлин М.А., О некоторых алгоритмических проблемах для целочисленных матриц, в сб. "Математика и механика", тезисы докладов 6-ой Казахстанской межвузовской научной конференции, часть I, Математика, Алма-Ата, 1977, 134.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАХСКОЙ ССР

КАЗАХСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. С. М. КИРОВА

# ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

АЛМА-АТА, 1980