ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ БАЗ ДАННЫХ

М.А.Тайцлин *
Кафедра информатики
Тверской государственный университет
Тверь 170000, Желябова, 33
e-mail: Michael.Taitslin@tversu.ru

30 мая 2003 г.

Аннотация

Рассматриваются обогащения арифметики Пресбургера, получаемые добавлением одной одноместной операции. Широкий класс таких обогащений с разрешимой элементарной теорией был найден А.Л. Семёновым. Это — обогащения с помощью строго монотонной операции, согласованной со сложением. Для этих операций Семёнова С.М. Дудаков доказал трансляционную теорему: использование их в формулах не увеличивает выразительных возможностей, если рассматривать только локально генерические запросы, задаваемые формулами логики предикатов первого порядка.

Я рассматриваю слабо монотонные операциии и предлагаю достаточные условия для того, чтобы для такого обогащения имела место трансляционная теорема. Эти условия выполняются для операций Семёнова, но также и для многих других операций, которые не являются строго монотонными, например, для $2^{p([\log_2(x)])}$, где $p(y)$ является многочленом с целыми коэффициентами и с положительным старшим коэффициентом.

Грубо говоря, если для обогащения можно предложить хорошую элиминацию кванторов, то для него выполняется трансляционная теорема.

1 Введение

Типичной моделью базы данных со времён Кодда является реляционная модель, в которой база данных мыслится как собрание конечного числа конечных таблиц (см. Кодд, [5, 6]). Эта модель реализуется в большинстве

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта: 0001 00254).

существующих средств управлениями базами данных и в предлагаемых ими языках запросов. При этом в качестве языка запросов обычно предлагается та или другая стилизация языка логики предикатов первого порядка.

Обычно при этом удобно предполагать, что элементы хранящихся таблиц выбираются из фиксированного множества, называемого универсумом. Например, в качестве такового можно взять множество натуральных чисел (что мы дальше будем делать), множество всех слов некоторого конечного алфавита или какое-то другое множество. Это множество должно быть бесконечным. Оно может быть снабжено своими собственными отношениями и операциями. Эти отношения и операции обычно по своей природе не могут быть заданы конечными таблицами. Например, на множестве натуральных чисел можно рассматривать отношение обычного порядка и операцию сложения.

Выберем в качестве языка запросов язык логики предикатов первого порядка. В языке запросов, кроме имён хранящихся таблиц, можно использовать и имена отношений и операций самого универсума. Другими словами, в языке запросов можно рассматривать как хранящуюся информацию, так и общие знания об универсуме. Например, язык SQL, используемый в системе Oracle и в других подобных системах, разрешает использовать как имена хранящихся таблиц, так и отношение сравнения и арифметические операции над числами.

Итак, запросами являются формулы логики предикатов первого порядка. Расширяет ли использование общих знаний выразительные возможности языка запросов? Более частный вопрос состоит в том, расширяет ли использование порядка выразительные возможности языка запросов. Это тем более интересно, что хранящаяся информация всегда упорядочена. По этой причине можно рассматривать только упорядоченные универсумы. Этот вопрос заинтересовал меня ещё в 1990 году и я задал его Ю.Ш.Гуревичу. Сразу ясно, что запрос $3 < x < 7$ нельзя записать без использования отношения порядка. Понятно поэтому, что надо рассматривать только запросы, не зависящие от упорядочения универсума, другими словами, не меняющиеся при любой перестановке элементов универсума. Такие запросы называют генерическими. Приведённый выше запрос этому условию не удовлетворяет.

Юрий Шлёмович ответил немедленно. Ответ не зависит от универсума и является положительным. Даже если мы ничего не знаем о порядке, мы всегда можем предложить генерический запрос, который нельзя записать без использования отношения порядка (см.[3]).

Поразительно, но во многих случаях имеет место трансляционная теорема: использование других общих знаний дополнительно к упорядочению уже не расширяет выразительные возможности языка запросов. Подробнее об этом можно прочитать в [4, 3, 1]. Естественно при этом надо рассматривать только так называемые локально генерические запросы, которые не меняются при любом сохраняющем порядок вложении конечного подмножества универсума в универсум.

Как уже говорилось, в качестве универсума мы будем рассматривать обогащения арифметики Пресбургера, другими словами, обогащения структуры $(\mathbb{N}, <, +)$, где $\mathbb{N}$ — это множество $\{0, 1, 2, \dots\}$ натуральных чисел. Для арифметики Пресбургера трансляционная теорема верна (см.[3]). Но что можно ещё добавить, сохраняя трансляционную теорему? Понятно, что добавить умножение нельзя, так как тогда можно будет написать формулу, утверждающую, что число элементов отношения P чётно, что, разумеется, невозможно с использованием только отношений порядка и P.

Но если элементарная теория обогащения неразрешима, другими словами, не существует алгоритма для проверки истинности формул логики предикатов первого порядка на этом обогащении, то использовать общие знания в языке запросов вообще невозможно, так как нет алгоритма для получения по записи запроса ответа на этот запрос. По этой причине такие универсумы не имеет смысла рассматривать. Это относится как раз к случаю, когда добавляется умножение.

Мы рассматриваем только обогащения с разрешимой элементарной теорией. Мы думаем, что для них трансляционная теорема всегда верна. Более точно, мы предлагаем следующие гипотезы, которые, к сожалению, не умеем доказывать в общем случае.

Гипотеза 1. *Если для обогащения арифметики Пресбургера не выполняется трансляционная теорема, то элементарная теория этого обогащения неразрешима.*

Гипотеза 2. *Если для обогащения арифметики Пресбургера не выполняется трансляционная теорема, то имеется такая формула $\Phi(x, y)$ логики предикатов первого порядка в языке этого обогащения, что для любого конечного подмножества A натуральных чисел найдётся такое натуральное число b, что $A = \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(a, b)\}$. В частности, случайный граф интерпретируется в этом обогащении.*

Настоящим прорывом в доказательстве этой гипотезы, хотя и не доказывающим её, явилась замечательная работа Балдвина и Бенедикта [1], в которой трансляционная теорема доказана для любых универсумов без независимой формулы.

Формула логики предикатов первого порядка $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ называется независимой, если она обладает следующим свойством:

для каждого натурального n найдутся такие наборы значений $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ для набора переменных $\overline{x}$, что для любого $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ найдётся такой набор значений $\overline{b}_I$ для набора переменных $\overline{y}$, что

$$I \;=\; \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \phi(\overline{a}_i, \overline{b}_I)\}.$$

Гипотеза 3. *Элементарная теория любого обогащения арифметики Пресбургера с независимой формулой неразрешима.*

Ясно, что если справедлива гипотеза 3, то гипотеза 1 тоже справедлива.

Не умея доказывать эти гипотезы в общем случае, я рассматриваю обогащения одной одноместной операцией. К сожалению, и в этом случае я не могу доказывать эти гипотезы. Но я замечаю, что если, грубо говоря, разрешимость элементарной теории доказывается путём естественной элиминации кванторов, а операция является неубывающей равномерно быстро растущей с равномерно далёким, но не слишком далёким расположением соседних точек роста, то трансляционная теорема выполняется. Точная формулировка моих условий содержится в определении сильно разделенной операции.

В частности, мои условия выполняются для случая операций, рассмотренных А.Л.Семёновым. Это — согласованные со сложением строго монотонные операции (см. [10]). Но, кроме того, предлагаемые достаточные условия выполняются и для многих других операций, например, для $2^{p([\log_2(x)])}$, где $p(y)$ является многочленом с целыми коэффициентами и с положительным старшим коэффициентом.

Нужно отметить, что ранее С.М.Дудаков ([8]) доказал, что трансляционная теорема имеет место, если арифметика Пресбургера обогащается согласованной со сложением строго монотонной операцией. Доказательство интересно, так как никакое обогащение арифметики Пресбургера не может быть квази-o-минимальным ([2]). Я использую введенное С.М. Дудаковым в ([8]) понятие разделённой неразличимой последовательности.

2 Определения

Мы рассматриваем универсумы вида

$$(\mathbb{N},\ <\ 0,\ 1,\ +,\ \{[\ /n]\mid n=1,2,\dots\},\ f) \tag{1}$$

сигнатуры

$$\{\ <,\ 0,\ 1,\ +,\ \{[\ /n]\mid n=1,2,\dots\},\ f^{(1)}\}, \tag{2}$$

где $[x/n]$ есть такое натуральное число y, что $ny \leqslant x$ и $x < n(y+1)$.

Схемой базы данных является конечный набор имён отношений с указанием числа аргументных мест каждого отношения. Все отношения, имена которых включены в рассматриваемую схему базы данных, предполагаются конечноместными. *Состоянием* рассматриваемой схемы базы данных или базой данных с рассматриваемой схемой называется отображение, которое каждому имени отношения местности k из рассматриваемой схемы приписывает конкретное конечное подмножество множества $(\mathbb{N})^k$. Это конкретное отношение представляет собой конечный набор последовательностей длины k натуральных чисел и может быть задано как таблица с k столбцами и конечным числом строк. По этой причине каждая база данных для данной схемы представляет собой собрание конечного числа конечных таблиц. Число таблиц и число столбцов в каждой таблице задаётся схемой. Но число строк и сами эти строки в таблицах могут меняться. Так что имеется много разных состояний у заданной схемы. Если все элементы всех строк всех таблиц для рассматриваемого состояния s содержатся в конечном множестве

X натуральных чисел, то мы будем говорить, что это состояние s является состоянием над X.

В качества языка запросов мы используем язык логики предикатов первого порядка. Это значит, что запросами являются формулы этого языка. В формулах можно использовать или имена отношений рассматриваемой схемы и символ $<$ отношения порядка, либо также и символы операций из сигнатуры (2). Формулы первого вида мы называем *ограниченными*, а формулы второго вида — *расширенными*. Состояние задаёт некоторое обогащение универсума (1). Запись $\Phi(\overline{x})$ означает, что все свободные переменные формулы Φ содержатся в последовательности $\overline{x}$. Тогда записи $\overline{a} \in \Phi(s)$ и $s \models \Phi(\overline{a})$ означают, что формула Φ истинна на состоянии s, когда набору переменных $\overline{x}$ приписаны в качестве значений натуральные числа $\overline{a}$.

Мы рассматриваем только формулы специального вида, которые задают так называемые *локально генерические запросы*. Запрос Φ называется локально генерическим, если

$$\overline{a} \in \Phi(s) \;\Leftrightarrow\; \rho(\overline{a}) \in \Phi(\rho(s))$$

для любого такого частичного $<$-изоморфизма $\rho : X \to \mathbb{N}$, что $X \subseteq \mathbb{N}$, для любого состояния s над X и для любой последовательности $\overline{a}$ элементов X. Здесь образ последовательности есть последовательность образов, а образ конечной таблицы является таблицей, составленной из образов элементов заданной таблицы. Образ состояния (конечной совокупности таблиц) представляет собой совокупность образов этих таблиц.

Пусть $A(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i f(x + m_i)$. Следующие условия называют условиями Семёнова:

- f строго монотонна;
- для любых целых чисел $n_1, \ldots, n_k,\ m_1, \ldots, m_k$ существует такое натуральное число δ, что или $|A(x)| < \delta$ для всех натуральных x, либо $|\ A(x+\delta)|\ > f(x)$ для всех натуральных x;
- для любых целых чисел $n_1, \ldots, n_k,\ m_1, \ldots, m_k$, или $A(x) > 0$ для почти всех натуральных x, или $A(x) < 0$ для почти всех натуральных x, или $A(x) = 0$ для всех x;
- f по модулю m является периодической для любого положительного целого m.

Если для f выполнены условия Семёнова, то эта f называется согласованной со сложением. В этом случае (1) мы будем называть структурой Семёнова. В [10] для структур Семёнова доказано, что любая формула логики предикатов первого порядка эквивалентна бескванторной формуле сигнатуры

$$\{\ <,\ 0,\ 1,\ +,\ \{[\ /n] \mid n = 1, 2, \ldots\},\ f^{(1)}, f^{-1}\}, \tag{3}$$

где $f^{-1}(n) = 0$, если $n < f(0)$, а в остальных случаях $f^{-1}(n) = m$ означает, что $f(m) \leqslant n < f(m+1)$.

3 Элиминация кванторов

Пусть

$$f(x) = 2^{([\log_2 x]^2)} \tag{4}$$

для $x > 0$ и $f(0) = 0$. Здесь $[\log_2 x] = i \Leftrightarrow 2^i \leqslant x < 2^{i+1}$. Если $2^i \leqslant x < 2^{i+1}$, то $f(x) = 2^{(i^2)}$.

Эта f не интерпретируема в $(\mathbb{N}, <, +, 2^x)$, так как элементарная теория структуры $(\mathbb{N}, <, +, 2^x, f)$ неразрешима.

В самом деле, если $u = 2^x$, $v = 2^y$, $w = 2^{x+y}$, $f(u) = 2^z$, $f(v) = 2^t$ и $f(w) = 2^s$, то $z = x^2$, $t = y^2$ и $s = (x+y)^2$. Следовательно, $s = z + t + 2xy$ и мы определили умножение.

Кстати, не так уж и просто привести примеры таких f, что элементарная теория структуры $(\mathbb{N}, <, +, f)$ разрешима, а f не интерпретируема ни в какой структуре Семёнова.

Например, если $f(x)$ является многочленом с целыми коэффициентами от x и $[\log_2 x]$, степень которого больше 1, то элементарная теория структуры $(\mathbb{N}, <, +, f)$ неразрешима, так как умножение определимо в этой элементарной теории.

Пусть $g(x) = [\log_2 x]$. Пусть $f(x) = P(x, g(x))$. Целочисленный многочлен $P(x, y)$ можно представить как

$$x^k P_k(y) + x^{k-1} P_{k-1}(y) + \cdots + x P_1(y) + P_0(y),$$

где $P_k(y)$, ... , $P_1(y)$, $P_0(y)$ — целочисленные многочлены. Назовём k степенью f, если P_k — ненулевой многочлен. Мы предполагаем, что либо степень больше 1, либо степень равна 1 и P_1 содержит y, либо степень равна 0 и P_0 имеет степень больше 1 относительно y.

Если $P(x, y)$ не содержит y, то $f(x+1) - f(x)$ может быть задана многочленом от x меньшей степени. По этой причине можно считать, что $f(x) = x^2$. Уже было замечено, что тогда

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Мы определили умножение.

Пусть k — степень f. Предположим, что $k > 0$. Другой случай рассмотрим позже. Кроме того, будем рассматривать только достаточно большие x. Если $P_k(y)$ не содержит y, то $f(x+1) - f(x)$ имеет меньшую степень. В остальных случаях $f(x+1) - f(x)$ имеет меньшую степень тогда и только тогда, когда

$$P_k(g(x+1)) = P_k(g(x)).$$

Если, сделав k таких шагов, мы получим многочлен нулевой степени, значит, выражение, меньшее x, то это равносильно тому, что

$$g(x+k) = g(x) \tag{5}$$

При выполнении этого условия (5) после нескольких таких шагов мы либо придём к случаю

$$h(x) = xQ(g(x)) + Q'(g(x)), \tag{6}$$

где $Q(y)$ содержит y, либо к случаю

$$h(x) = nx^2 + Q'(g(x)),$$

где n — положительное целое число.

Рассмотрим сначала последний случай. Для любого достаточно большого x хотя бы одно из чисел x, $x+1$, … , $x+2k$ удовлетворяет условию (5). Достаточно найти квадрат только этого числа. Но $h(2x) - h(x)$ приводит к случаю, когда либо $Q'(y)$ является нулевым многочленом, либо его степень относительно y уменьшается.

В случае (6), $h(2x) - 2h(x)$ понижает степень Q. Поэтому можно считать, что $Q(g(x)) = ng(x)$ для некоторого положительного целого n. Тогда $h(2x) - h(x) - x$ уменьшает степень Q'. Поэтому остаётся разобрать случай, когда $h(x) = xg(x)$. В этом случае $h(x+1) - h(x) = g(x)$. Если $x = 2^i + i$ и $0 < i$, то $i = g(x)$. Если $g(z) > g(z-1)$ и $x < z < 2x$, то $z = 2^{i+1}$ и $-h(z) + 2h(x) + z = 2i^2$.

Осталось рассмотреть случай, когда степень f равна нулю. В этом случае $f(2x) - f(x)$ понижает степень P_0. Поэтому можно считать, что эта степень равна 2. В таком случае $ng(x) + m = f(2x) - f(x)$ для всех x и подходящих натуральных n и m. Это определяет $g(x)$. Поэтому можно считать, что $f(x) = (g(x))^2$. Но если $g(x) = i$, то $f(x) = i^2$.

Можно также рассматривать целый класс операций

$$f(x) = 2^{P([\log_2 x])}, \tag{7}$$

где $P(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$; $d_0, d_1, \ldots, d_n$ — целые числа; $n > 1$ и $d_n > 0$.

Аналогичная элиминация кванторов имеет место и для

$$f(x) = \ell^{g([\log_\ell x])} \tag{8}$$

где ℓ — натуральное число, $\ell > 1$, g — одноместная операция на натуральных числах, которая является периодической по модулю m для любого положительного натурального числа m, и $g(n+1) - g(n) > n$.

Для простоты мы приводим доказательство только для (4), хотя, конечно, это же доказательство почти без изменений годится и для любой операции (7) и (8).

Теорема 3.1. *Для любой f, определенной равенством* (7), *элементарная теория структуры* (1) *допускает элиминацию кванторов в сигнатуре* (3).

Это означает, что любая формула сигнатуры (2) эквивалентна бескванторной формуле сигнатуры (3). При этом $f^{-1}(0) = 0$ и $f^{-1}(x) = i \Leftrightarrow$

$f(i-1) < f(i) \leqslant x < f(2i)$ для $x > 0$. Если $2^{P(i)} \leqslant x < 2^{P(i+1)}$, то $f^{-1}(x) = 2^i$.

Далее мы ограничимся случаем, когда выполняется (4). В этом случае $P(i) = i^2$.

Для операции f, заданной (4), рассмотрим структуру

$$\mathbf{S} = (\mathbb{N}, <, 0, 1, +, [\ /n], f, f^{-1} \mid n = 2, 3, \dots)$$

сигнатуры (3).

Доказательство теоремы. Мы доказываем три леммы, из которых теорема следует очевидным образом.

Напомним, что экзистенциальной называется такая предварённая формула логики предикатов первого порядка, которая не содержит кванторов всеобщности.

Лемма 3.2. *Если любая экзистенциальная формула эквивалентна в* $\mathbf{S}$ *некоторой бескванторной формуле, то любая формула логики предикатов первого порядка эквивалентна в* $\mathbf{S}$ *некоторой бескванторной формуле.*

Доказательство. Индукция по числу кванторов. При этом $(\forall u)\Psi$ эквивалентна $\neg(\exists u)\neg\Psi$. ∎

Пусть $[u]$ обозначает $f^{-1}(f(u))$. Если $2^i \leqslant u < 2^{i+1}$, то $[u] = 2^i$. Понятно, что $[u] \leqslant u < 2[u]$.

Экзистенциальная формула называется sm-формулой, если она имеет следующий вид:

$$(\exists u_1) \dots (\exists u_m)\Theta, \tag{9}$$

где Θ является конъюнкцией формул видов $t_1 < t_2$ и $t_1 = t_2$, в которых t_q для $q = 1, 2$ имеют вид

$$(\sum_{i=1}^{k}(m_{q,i}f(x_i) + n_{q,i}x_i + l_{q,i}[x_i])) + m_q,$$

где $l_{q,i}$, $m_{q,i}$, $n_{q,i}$ и m_q — это натуральные числа, а x_i — переменные. Если $m_{1,i} \neq m_{2,i}$, мы говорим, что $f(x_i)$ входит в $t_1 < t_2$ и $t_1 = t_2$, а если $l_{1,i} \neq l_{2,i}$, мы говорим, что $[x_i]$ входит в $t_1 < t_2$ и $t_1 = t_2$. Φ содержит такой терм $f(x_i)$ или $[x_i]$, если он входит в один из конъюнктивный членов этой формулы.

Лемма 3.3 (Семёнов, [10]). *Любая экзистенциальная формула эквивалентна в* $\mathbf{S}$ *дизъюнкции* sm-*формул.*

Лемма 3.4. *Любая* sm-*формула эквивалентна в* $\mathbf{S}$ *бескванторной формуле.*

Доказательство. Индукцией по числу m кванторов в формуле (9).

Используя традиционный способ элиминации кванторов в арифметике Пресбургера, мы можем исключить $u_1, \dots, u_m$. Для этого надо сначала добавить неравенства $[u_i] \leqslant u_i < 2[u_i]$ для $i = 1, \dots, m$. При исключении $u_1, \dots, u_m$ возникнут дополнительные бескванторные формулы

$$\rho(x_1, \dots, x_k, [u_1], \dots, [u_m]),$$

утверждающие, что $x_1, \dots, x_k, [u_1], \dots, [u_m]$ при делении на заданные натуральные числа дают заданные остатки, а формула Θ заменится на дизъюнкцию конъюнкций вида $(\rho \& \Phi)$, в которых Φ является конъюнкцией формул вида $t_1 < t_2$, в которых t_1 и t_2 имеют вид

$$(\sum_{i=1}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) + t,$$

где l_i и m_i — это натуральные числа, а t — терм, не содержащий $u_1, \dots, u_m$ и имеющий вид

$$(\sum_{i=1}^{k}(q_i f(x_i) + r_i x_i + s_i[x_i])) + s,$$

где q_i, r_i, s_i и s — это натуральные числа, а x_i — переменные.

При этом мы используем то обстоятельство, что остаток от деления на натуральное число ℓ числа $2^{(i^2)}$ полностью определяется остатком от деления на ℓ числа 2^i, так как для каждого ℓ существуют такие натуральные числа ℓ_1 и ℓ_2, что остаток от деления на ℓ числа 2^i для $i > \ell_1$ определяется остатком от деления $i - \ell_1$ на ℓ_2.

Достаточно рассмотреть каждый дизъюнктивный член этой полученной дизъюнкции отдельно. При этом рассмотрении формула ρ существенной роли не играет и мы её игнорируем.

Будем предполагать, что $[u_1] > [u_2] > \cdots > [u_m]$ и что Φ содержит либо $f(u_i)$, либо $[u_i]$ для каждого $i = 1, \dots, m$. Пусть j — это наименьшее из чисел $1, \dots, m$, для которого $f(u_j)$ входит в Φ. Случай, когда $j = 1$, рассмотрим позже.

Будем изучать расположение $[u_1], \dots, [u_{j-1}]$ относительно $f(u_j)$.

Случай 1. $[u_1] > f(u_j)$. В этом случае доказательство подобно доказательству Семёнова для $(\mathbb{N}, <, +, [x])$. Несмотря на это, рассмотрим этот случай подробнее.

Φ эквивалентна конъюнкции неравенств видов

$$t + (\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) < l_1[u_1], \tag{10}$$

$$t + (\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) > l_1[u_1], \tag{11}$$

где t не содержит $u_1, \ldots, u_m$; l_i и m_i — целые числа, а $l_1 > 1$. Как отмечено в [10], можно считать, что

$$2(\sum_{i=2}^{m}(|m_i| + |l_i|))([u_2] + f(u_j)) < [u_1].$$

В противном случае для $[u_1]$ имелось бы только конечное число возможных значений.

Поэтому неравенство ψ вида (10) эквивалентно дизъюнкции

$$(2t < (2l_1 - 1)[u_1] \vee (t \leqslant (2l_1 - 1)[u_1] \leqslant 2t \& \psi)). \tag{12}$$

В самом деле, если выполняется неравенство $2t < (2l_1 - 1)[u_1]$, то

$$2l_1[u_1] - 2(\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) > 2l_1[u_1] - 2(\sum_{i=2}^{m}(|m_i| f(u_j) + |l_i|[u_2])) >$$
$$2l_1[u_1] - 2(\sum_{i=2}^{m}(|m_i| + |l_i|)([u_2] + f(u_j)) > (2l_1 - 1)[u_1] > 2t.$$

Поэтому ψ тоже выполняется. Если же $t > (2l_1 - 1)[u_1]$, то

$$l_1[u_1] - (\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) < l_1[u_1] + (\sum_{i=2}^{m}(|m_i| f(u_j) + |l_i|[u_2])) <$$
$$l_1[u_1] + (\sum_{i=2}^{m}(|m_i| + |l_i|)([u_2] + f(u_j)) < (l_1 + 0.5)[u_1] < (2l_1 - 1)[u_1] < t.$$

Поэтому ψ не выполняется.

Второй дизъюнктивный член в (12) даёт для $[u_1]$ конечное число возможных значений.

Неравенство вида (11) рассматривается аналогично.

Неравенство ψ вида (11) эквивалентно дизъюнкции

$$(2t > (2l_1 + 1)[u_1] \vee (2t \leqslant (2l_1 + 1)[u_1] \leqslant 4t \& \psi)). \tag{13}$$

В самом деле, если выполняется неравенство $2t > (2l_1 + 1)[u_1]$, то

$$2l_1[u_1] - 2(\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) < 2l_1[u_1] + 2(\sum_{i=2}^{m}(|m_i| f(u_j) + |l_i|[u_2])) <$$
$$2l_1[u_1] + 2(\sum_{i=2}^{m}(|m_i| + |l_i|)([u_2] + f(u_j)) < (2l_1 + 1)[u_1] < 2t.$$

Поэтому ψ тоже выполняется. Если же $4t < (2l_1 + 1)[u_1]$, то

$$l_1[u_1] - (\sum_{i=2}^{m}(m_i f(u_i) + l_i[u_i])) > l_1[u_1] - (\sum_{i=2}^{m}(|m_i| f(u_j) + |l_i|[u_2])) >$$
$$l_1[u_1] - (\sum_{i=2}^{m}(|m_i| + |l_i|)([u_2] + f(u_j)) > (l_1 - 0.5)[u_1] > \frac{l_1 + 0.5}{2}[u_1] > t.$$

Поэтому ψ не выполняется.

Второй дизъюнктивный член в (13) даёт для $[u_1]$ конечное число возможных значений.

Случай 2. $f(u_j) > [u_1]$ либо $j = 1$.

Будем предполагать, что первый конъюнктивный член формулы Φ содержит $f(u_j)$. Рассмотрим этот первый конъюнктивный член и конъюнкцию Ψ остальных конъюнктивных членов формулы Φ.

Случай 2.1. Φ эквивалентна

$$t + (\sum_{i \neq j,\ i=1}^{m} (m_i f(u_i) + l_i[u_i])) < m_j f(u_j) + l_j[u_j] \& \Psi,$$

где t не содержит $u_1, \ldots, u_m$; l_i и m_i — целые числа; $m_j > 0$ и $m_i = 0$ для $i = 1, \ldots, j-1$.

Либо

$$f(u_j) \in \{[u_1], 2[u_1], \ldots, 4(\sum_{i=1}^{m}(|m_i| + |l_i|))[u_1]\},$$

либо

$$f(u_j) > 4(\sum_{i=1}^{m}(|m_i| + |l_i|))[u_1].$$

Если выполняется первое из этих условий, то для $[u_1]$ имеется конечное число возможных значений. Предполагаем, что выполняется второе условие.

Либо

$$[u_j] \in \{0, 1, \ldots, 2(\sum_{i=1}^{m}(|m_i| + |l_i|))\},$$

либо

$$[u_j] > 2(\sum_{i=1}^{m}(|m_i| + |l_i|)).$$

Если выполняется первое из этих условий, то для $[u_j]$ имеется конечное число возможных значений. Предполагаем, что выполняется второе условие.

Пусть $[u_j]=2^v$ и $f(u_j)=2^{(v^2)}$. Тогда

$$m_jf(u_j)+l_j[u_j]-\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m}(m_if(u_i)+l_i[u_i])\leqslant m_jf(u_j)+((\sum_{i=1}^{j-1}|l_i|)+|l_j|)[u_1]+$$

$$\sum_{i=j+1}^{m}(|l_i|[u_i]+|m_i|f(u_i))\leqslant m_jf(u_j)+(\sum_{i=1}^{m}|l_i|)[u_1]+\sum_{i=j+1}^{m}|m_i|f(u_i)<$$

$$(2m_j+\sum_{i=j+1}^{m}|m_i|)f(u_j)<2^v2^{v^2}<2^{(v+1)^2};$$

$$m_jf(u_j)+l_j[u_j]-\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m}(m_if(u_i)+l_i[u_i]\geqslant m_jf(u_j)-((\sum_{i=1}^{j-1}|l_i|)+|l_j|)[u_1]-$$

$$\sum_{i=j+1}^{m}(|l_i|[u_i]+|m_i|f(u_i))\geqslant m_jf(u_j)-(\sum_{i=1}^{m}|l_i|)[u_1]-\sum_{i=j+1}^{m}|m_i|f(u_i)>$$

$$0.5m_jf(u_j)-(\sum_{i=j+1}^{m}|m_i|)f(u_{j+1})>2^{v^2-1}-2^v2^{(v-1)^2}>2^{(v-1)^2}.$$

Поэтому либо Φ эквивалентна

$$f^{-1}(t)=[u_j]\&f(f^{-1}(t))=f(u_j)\&\Phi,$$

либо Φ эквивалентна

$$2f^{-1}(t)=[u_j]\&f(2f^{-1}(t))=f(u_j)\&\Phi,$$

либо Φ эквивалентна

$$2f^{-1}(t)<[u_j]\&\Psi.$$

С другой стороны, Φ эквивалентна дизъюнкции

$$(m_jf(u_j)>2t\ \&\ \Psi)\vee(t\leqslant 2m_jf(u_j)\leqslant 4t\ \&\ \Phi).$$

В самом деле, если $m_jf(u_j)>2t$, то

$$m_jf(u_j)+l_j[u_j]-\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m}(m_if(u_i)+l_i[u_i])\geqslant m_jf(u_j)-|l_j|[u_j]-$$

$$\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m}(|m_i|f(u_i)+|l_i|[u_i])\geqslant m_jf(u_j)-(\sum_{i=1}^{m}|l_i|)[u_1]-(\sum_{i=j+1}^{m}|m_i|)f(u_{j+1})>$$

$$0.5m_jf(u_j)>t.$$

Если же $2m_jf(u_j) < t$, то

$$m_jf(u_j) + l_j[u_j] - \sum_{i\neq j,\ i=1}^{m} (m_if(u_i) + l_i[u_i]) \leqslant m_jf(u_j) + |l_j|[u_j] +$$

$$\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m} (|m_i|f(u_i) + |l_i|[u_i]) \leqslant m_jf(u_j) + (\sum_{i=1}^{m} |l_i|)[u_1] + (\sum_{i=j+1}^{m} |m_i|)f(u_{j+1}) <$$

$$2m_jf(u_j) < t.$$

Случай 2.2. Φ эквивалентна

$$t + (\sum_{i\neq j,\ i=1}^{m} (m_if(u_i) + l_i[u_i])) > m_jf(u_j) + l_j[u_j]\&\Psi,$$

где t не содержит $u_1, \ldots, u_m$; l_i и m_i — целые числа; $m_j > 0$ и $m_i = 0$ для $i = 1, \ldots, j-1$.

Доказательство аналогично. При тех же обозначениях и предположениях либо Φ эквивалентна

$$f^{-1}(t) = [u_j]\&f(f^{-1}(t)) = f(u_j)\&\Phi,$$

либо Φ эквивалентна

$$2f^{-1}(t) = [u_j]\&f(2f^{-1}(t)) = f(u_j)\&\Phi,$$

либо Φ эквивалентна

$$f^{-1}(t) = 2[u_j]\&f(\frac{f^{-1}(t)}{2}) = f(u_j)\&\Phi,$$

либо Φ эквивалентна

$$f^{-1}(t) > 2[u_j]\&\Psi.$$

С другой стороны, Φ эквивалентна дизъюнкции

$$(2m_jf(u_j) < t\ \&\ \Psi) \vee (t \leqslant 2m_jf(u_j) \leqslant 4t\ \&\ \Phi).$$

■

■

4 Трансляционная теорема

Обозначение $t(x)$ используется для указания, что терм t не содержит никакой переменной, отличной от x. При этом $t(a)$ обозначает значение терма $t(x)$, когда значение x есть a. Обозначения $t(\overline{x})$ и $t(\overline{a})$ имеют аналогичный смысл. $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ указывает, что формула Φ не содержит переменных, не входящих в последовательности $\overline{x}$ и $\overline{y}$. При этом $\Phi(\overline{a}, \overline{b})$ является истинностным значением формулы $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$, когда значение $\overline{x}$ есть $\overline{a}$, а значение $\overline{y}$ есть $\overline{b}$.

Мы используем некоторые начальные сведения из теории моделей, которые, например, содержатся в [9]. В частности, множество I мы называем неразличимой последовательностью в M, если структуры $(M, a_1, \ldots, a_n)$ и $(M, b_1, \ldots, b_n)$ элементарно эквивалентны для всех натуральных n и для любых последовательностей $a_1 < \cdots < a_n$ и $b_1 < \cdots < b_n$ из I. При этом две структуры одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если всякая замкнутая формула логики предикатов первого порядка этой сигнатуры, истинная в одной из этих структур, истинна и в другой из них.

Пусть I является неразличимой последовательностью в M без наибольшего и наименьшего элементов. Эта последовательность называется разделённой (в M), если для любых термов $t_1(x)$ и $t_2(x)$ либо существует такое натуральное число n, что $t_2(a) = n$ для всех a из I, либо $t_1(a) < t_2(b)$ для любых $a < b$ из I. Это определение предложено С.М. Дудаковым и заимствовано из [8]. Структура (M, I) называется разделённой, если I разделена в M.

Теорема 4.1 (С.М. Дудаков,[8]). *Какова бы ни была одноместная операция f, существуют такие M и I, что M элементарно эквивалентна структуре* (1) *и I разделена в M.*

Рассмотрим структуру (1), в которой f является произвольной одноместной операцией. На эту операцию пока не накладывается никаких условий монотонности. Пусть M — произвольная структура, элементарно эквивалентная этой (1).

Пусть (M, I) разделена. Для последовательности $\overline{c}$ элементов из M индукцией по i строим множества $Y_i(\overline{c})$ элементов I. Для простоты пишем Y_i вместо $Y_i(\overline{c})$, если ясно, о какой последовательности $\overline{c}$ идёт речь. Пусть Y_0 пусто и X_0 — множество всех элементов последовательности $\overline{c}$.

Пусть Y_{i+1} — это множество всех таких элементов $b \in I$, для которых существуют такие терм $t(\overline{x})$, неограниченные термы $t_1(y)$ и $t_2(y)$ и $\overline{a} \in (X_0 \cup Y_i)$, что

$$t_1(b) < t(\overline{a}) < t_2(b). \tag{14}$$

Заметим, что для каждых терма t и последовательности $\overline{a}$ элементов M существует не более одного такого $b \in I$, что (14) выполняется для некоторых неограниченных t_1 и t_2. Поэтому Y_i счётно для любого i.

Обозначим через $[I, \overline{c}]$ объединение всех Y_i. Это объединение тоже счётно.

Рассмотрим структуру M вида (1) сигнатуры (2). Операцию f будем называть слабо монотонной в M, если выполняются следующие условия:

$f(0) = 0$,

для любого натурального m существует такое натуральное k, что $f(x) > m$ for $x > k$,

$f(x) \leqslant f(y)$ для любых $x < y$ из M.

Для любой слабо монотонной операции f существует такая последовательность натуральных чисел $s_f^{(0)}, s_f^{(1)}, \ldots, s_f^{(n)}, \ldots$, что

- $s_f^{(0)} = 0$ и $f(s_f^{(i)}) < f(s_f^{(i+1)})$ для любого натурального i,
- $f(x) = f(s_f^{(i)})$ для любого натурального i и $s_f^{(i)} \leqslant x < s_f^{(i+1)}$.

Для слабо монотонной f полагаем

$$f^{-1}(x) = s_f^{(i)} \Leftrightarrow f(s_f^{(i)}) \leqslant x < f(s_f^{(i+1)}).$$

Далее рассматриваем структуры (1), в которых f является слабо монотонной. Пусть $S(x) = s_f^{(i+1)}$ для $s_f^{(i)} \leqslant x < s_f^{(i+1)}$.

Будем рассматривать формулы сигнатуры

$$\{\ <,\ 0,\ 1,\ +,\ \{[\ /n] \mid n = 1, 2, \ldots\},\ f^{(1)}, f^{-1},\ S^{(1)}\}, \tag{15}$$

Рассмотрим разделённую (M, I). Зафиксируем последовательности переменных $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Бескванторную формулу назовём разделённой, если она является булевой комбинацией (другими словами, конъюнкцией дизъюнкций) атомных разделённых формул. Атомная же формула (другими словами, выражение вида r<s, где r и s — термы) называется разделённой, если эта формула имеет вид

$$t_1(\overline{x}) + t_2(\overline{y}) < t_3(\overline{x}) + t_4(\overline{y}).$$

Элементарную теорию структуры (M, I) назовём разделённой, если для каждой формулы $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ логики предикатов первого порядка существует такая бескванторная разделённая формула $\Psi(\overline{x}, \overline{y})$, что для любых последовательностей $\overline{b}$ элементов из M, $\overline{a} \in (I \setminus [I, \overline{b}])$ и $\overline{c} \in ([I, \overline{b}] \cup \overline{b})$ формула $\Phi(\overline{a}, \overline{c})$ эквивалентна $\Psi(\overline{a}, \overline{c})$. Операцию f назовём разделённой, если существует такая разделённая (M, I) с разделённой элементарной теорией, что M элементарно эквивалентна структуре (1).

Следующая теорема является тривиальным следствием теорем 3.1 и 3.2 из [7].

Теорема 4.2. *Если в структуре* (1) *операция f является разделённой, то для этой структуры любой локально генерический расширенный запрос эквивалентен ограниченному.*

Теорема 4.3 (Дудаков, [8]). *Элементарная теория структуры (M, I), в которой M элементарно эквивалентна структуре* (1) *с согласованной со сложением f, является разделённой.*

Я предлагаю некоторое достаточное условие для того, чтобы f была разделённой. Это условие является результатом осмысления предложенного Дудаковым доказательства теоремы 4.3. Операция (4) этому достаточному условию удовлетворяет, как видно из доказательства леммы 3.4. Поэтому операция (4) является разделённой и трансляционная теорема справедлива для обогащения арифметики Пресбургера этой операцией. То же самое верно и для всех операций (7) и (8).

Слабо монотонную f назовём сильно разделённой, если выполняются следующие условия:

(а) для любого натурального числа m существует такое натуральное число $g(m)$, что для любых натуральных чисел a и i, если $s_f^{(i)} = f^{-1}(a)$, то

$$s_f^{(i+g(m))} > f^{-1}(ma),$$

другими словами,

$$f(S^{g(m)}(f^{-1}(a))) > ma$$

для любого натурального числа a;

(б) существует такое натуральное число k, что

$$f^k(s_f^{(i)}) \geqslant s_f^{(i+1)}$$

для каждого натурального числа i;

(в) любая sm-формула с m кванторами эквивалентна дизъюнкции sm-формул, имеющих каждая менее m кванторов, и формул

$$(\exists[u_1])\dots(\exists[u_m])\Theta(\overline{[u]},\overline{x}),$$

в которых $\Theta(\overline{[u]},\overline{x})$ является конъюнкцией формулы

$$\rho(x_1,\dots,x_k,[u_1],\dots,[u_m]),$$

утверждающей, что $x_1,\dots,x_k,[u_1],\dots,[u_m]$ при делении на заданные натуральные числа дают заданные остатки, и sm-формул видов

$$t_2(\overline{x}) + m_2 f([u_1]) < t_1(\overline{x}) + m_1 f([u_1]), \tag{16}$$

$$n_2 t(\overline{x}) < m f([u_1]) < n_1 t(\overline{x}) \& \Psi(\overline{[u]},\overline{x}), \tag{17}$$

$$t_2(\overline{x}) + m_2[u_1] < t_1(\overline{x}) + m_1[u_1] \tag{18}$$

и

$$n_2 t(\overline{x}) < m[u_1] < n_1 t(\overline{x}) \& \Psi(\overline{[u]},\overline{x}), \tag{19}$$

в которых m, m_1, m_2, n_1 и n_2 являются натуральными числами, а $\Psi(\overline{[u]},\overline{x})$ является бескванторной sm-формулой;

(г) существует такое натуральное число j, что либо формулы видов (18) и (19) никогда не появляются, либо $s_f^{(i+1)} \geqslant 2s_f^{(i)}$ для любых натуральных чисел $i \geqslant j$.

Примерами сильно разделённых операций являются согласованные со сложением операции. Операции (4) и (7) тоже являются сильно разделёнными.

Теорема 4.4. *Любая сильно разделённая операция f является разделённой.*

Доказательство. Рассмотрим разделённую (M, I), в которой M элементарно эквивалентна структуре (1).

Предварительно заметим, что I является разделённой в M последовательностью и в том случае, когда рассматриваются термы сигнатуры (15). Надо только проверить, что $S(x) < y$ для таких $x < y$, что $f^k(x) < y$ для любого натурального числа k. Но из условия **(б)** определения сильно разделённой операции следует, что $S(x) \leqslant f^k(x)$ для подходящего k.

Рассмотрим sm-формулу с m кванторами. Надо доказать, что эта формула является разделённой. Это доказываем индукцией по числу кванторов.

По условию, эта формула эквивалентна дизъюнкции sm-формул, каждая из которых содержит меньше m кванторов, и sm-формул

$$(\exists [u_1]) \ldots (\exists [u_m]) \Theta(\overline{[u]}, \overline{x}),$$

в которых $\Theta(\overline{[u]}, \overline{x})$ является конъюнкцией формулы

$$\rho(x_1, \ldots, x_k, [u_1], \ldots, [u_m]),$$

утверждающей, что $x_1, \ldots, x_k, [u_1], \ldots, [u_m]$ при делении на заданные натуральные числа дают заданные остатки, и sm-формул видов (16), (17), (18) and (19).

Для любых последовательностей $\overline{b}$ элементов M и $\overline{d} \in I$ разобьём множество всех элементов этих последовательностей $\overline{b}$ и $\overline{d}$ в две последовательности $\overline{a}$ и $\overline{c}$ таким образом, что $\overline{a} \in (I \setminus [I, \overline{b}])$ и $\overline{c} \in ([I, \overline{b}] \cup \overline{b})$. Пусть при этом $\overline{a}$ есть $a_1, \ldots, a_n$.

Назовём терм $u(y_1, \ldots, y_n, \overline{z})$ сильно разделённым, если существуют такие термы $u_1(y_1)$, … , $u_n(y_n)$, $v(\overline{z})$, что

$$u(y_1, \ldots, y_n, \overline{z}) = (\sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)) + v(\overline{z}).$$

Индукцией по m, а при заданном m индукцией по числу конъюнктивных членов построим для конъюнкции формул видов (16), (17), (18) and (19) эквивалентную дизъюнкцию конюнкций формул вида

$$w_1(\overline{a}, \overline{c}) < w_2(\overline{a}, \overline{c}),$$

в которой термы $w_1(\overline{y},\overline{z})$ и $w_2(\overline{y},\overline{z})$ являются сильно разделёнными. Как будет видно из построения, при заданных $\overline{b}$ термы $w_1(\overline{y},\overline{z})$ и $w_2(\overline{y},\overline{z})$ в этой эквивалентной дизъюнкции конъюнкций не зависят от выбора $\overline{a}$ из $(I\backslash[I,\overline{b}])$.

Рассмотрим формулу (16). Пусть $m = m_1 - m_2 > 0$. Другой случай рассматривается аналогично. Формула (16) эквивалентна

$$mf(u_1) > t_3(\overline{c}) - t_4(\overline{c}) + t_5(\overline{a}) - t_6(\overline{a}) \tag{20}$$

для подходящих термов t_3, t_4, t_5, and t_6. Пусть

$$t_5(\overline{a}) - t_6(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n} t^{(j)}(a_j), \quad t_7(\overline{c}) = t_3(\overline{c}) - t_4(\overline{c}).$$

Можно считать, что все термы $t^{(j)}$ не ограничены на I.

Возможны два случая.

В первом из них существует такой a_i, что $t'(a_i)$ больше $t_7(\overline{c})$ и больше $t''(d)$ для любого неограниченного терма $t'(y)$, любого терма $t''(y)$ и любого $d \in \{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$. Тогда (20) либо выполняется для всех u_1, либо эквивалентна дизъюнкции $mf([u_1]) > 2t^{(i)}(a_i)$ и конъюнкции (20) и $(t^{(i)}(a_i) < 2mf([u_1]) \leqslant 4t^{(i)}(a_i))$. Из этой конъюнкции, используя условие **(а)** определения сильной разделённости операции, получаем конечное число возможных значений для $[u_1]$.

Во втором случае $t'(a_i) < t_7(\overline{c})$ для любого i и любого терма $t'(y)$. Доказательство аналогично. В этом случае (20) либо выполняется для всех u_1, либо эквивалентна дизъюнкции $mf(u_1) > 2t_7(\overline{c})$ и конъюнкции (20) и $(t_7(\overline{c}) < 2mf([u_1]) \leqslant 4t_7(\overline{c}))$.

Рассмотрение остальных формул аналогично. При рассмотрении формул (18) и (19) нужно использовать условие **(г)** определения сильной разделённости операции вместо условия **(а)** этого определения. ∎

Цитированная литература

[1] John Baldwin and Michael Benedikt. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(11):4937–4969 (electronic), 2000.

[2] Oleg Belegradek, Ya'acov Peterzil, and Frank Wagner. Quasi-o-minimal structures. *J. Symbolic Logic*, 65(3):1115–1132, 2000.

[3] O.V. Belegradek, A.P. Stolboushkin, and M.A. Taitslin. Extended order-generic queries. *Annals of Pure and Applied Logic*, 97(1–3):85–125, 1999.

[4] M. Benedikt, G. Dong, L. Libkin, and L. Wong. Relational expressive power of constraint query languages. In *Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems*, pages 5–16, 1996.

[5] E.F. Codd. A relational model for large shared data banks. *Communications of the ACM*, 13:377–387, 1970.

[6] E.F. Codd. Relational completeness of data base sublanguages. In R. Rustin, editor, *Database Systems*, pages 33–64. Prentice-Hall, 1972.

[7] M.A. Taitslin. A general condition for collapse results. *Annals of Pure and Applied Logic*, 113(1–3):323–330, 2001.

[8] С.М. Дудаков. Трансляционный результат для расширений арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением. Тверской государственный университет, 2001.

[9] Г. Кейслер and Ч.Ч. Чэн. *Теория моделей*. "Мир", Москва, 1977. Перевод с английского.

[10] А.Л. Семенов. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде. *Известия Академии Наук СССР, сер. математическая*, 47(3):623–658, 1983.