3 ТЕОРЕМА ПОСТА

Теорема 3.1. *Не существует других максимальных классов, кроме L, M, S, S_0, S_1.*

Другими словами, если некоторый класс не содержится ни в одном из этих пяти классов, то он полон.

Доказательство. Так как рассматриваемый класс F не содержится в L, то в F имеется нелинейная функция f_L.

Так как рассматриваемый класс F не содержится в M, то в F имеется немонотонная функция f_M.

Так как рассматриваемый класс F не содержится в S, то в F имеется несамодвойственная функция f_S.

Так как рассматриваемый класс F не содержится в S_0, то в F имеется такая функция f_0, что $f_0(0, \ldots, 0) = 1$.

Так как рассматриваемый класс F не содержится в S_1, то в F имеется такая функция f_1, что $f_1(1, \ldots, 1) = 0$.

Если $f_0(1, \ldots, 1) = 1$, то $f_0(x, \ldots, x)$ есть 1.

Если $f_1(0, \ldots, 0) = 0$, то $f_1(x, \ldots, x)$ есть 0.

Если $f_0(1, \ldots, 1) = 0$, то $f_0(x, \ldots, x)$ есть отрицание.

Если $f_1(0, \ldots, 0) = 1$, то $f_1(x, \ldots, x)$ есть отрицание.

Следовательно, в замыкании F либо содержится отрицание, либо содержатся обе константы.

Первый случай. $\neg \in [F]$.

Рассмотрим теперь несамодвойственную функцию f_S.

Тогда существует такой набор $\bar{\alpha}$ значений переменных, что

$$f_S(\neg\bar{\alpha}) = f_S(\bar{\alpha}).$$

Отрицание и функция, равная своему аргументу, принадлежат $[F]$.

Если α_i равно 1, в качестве h_i выберем x, а если α_i равно 0, в качестве h_i выберем $\neg x$. Тогда

$$g = f_S(h_1, \ldots, h_n)$$

является константой, так как $g(0) = g(1)$. Так как есть отрицание, то в $[F]$ имеются обе константы.

Рассмотрим, например, несамодвойственную функцию

x	y	z	f_S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Так как $f_S(0,1,1) = f_S(1,0,0)$, то для

$$h(x) = f_S(\neg x, x, x)$$

выполняется равенство $h(0) = h(1)$. При этом h есть 1, а $\neg h$ есть 0.

Второй случай. $0, 1 \in [F]$.

Так как f_M не является монотонной, мы найдём два соседних набора, первый меньше второго, на первом функция равна 1, а на втором она равна 0.

Итак,

$$f_M(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, 0, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n) = 1,$$

$$f_M(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, 1, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Тогда

$$h(x) = f_M(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, x, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n)$$

является отрицанием и принадлежит $[F]$.

Если, например, $f_M(0, 1, 0) = 1$, $f_M(1, 1, 0) = 0$, то в качестве $h(x)$ возьмём $f_M(x, 1, 0)$. Тогда $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, $h = \neg$.

Во всех случаях, $[F]$ содержит обе константы и отрицание.

Можно считать, что нелинейная функция f_L имеет вид

$$x_1x_2f(x_3,\ldots,x_n)+x_1g(x_3,\ldots,x_n)+x_2h(x_3,\ldots,x_n)+e(x_3,\ldots,x_n),$$

где f не является нулём. Значит, при некоторых значениях переменных f равно 1. Так как константы принадлежат $[F]$, мы можем вместо x_3, ... , x_n подставить эти значения и получить в замыкании $[F]$ функцию

$$x_1x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma.$$

Подставляя теперь вместо x_1 функцию $x_1+\beta$, вместо x_2 функцию $x_2+\alpha$, каждая из которых либо равна аргументу, либо есть отрицание, получим функцию

$$x_1x_2+\beta x_2+\alpha x_1+\alpha x_1+\beta x_2+(\alpha\beta+\gamma).$$

Подставляя эту функцию в функцию $x+(\alpha\beta+\gamma)$, получим произведение x_1x_2. Вместе с отрицанием мы получаем все булевы функции. Это доказывает полноту класса F. ∎

Например, имея $x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$, мы имеем

$$x_1x_2(x_3 + 1) + x_1.$$

Полагая $x_3 = 0$, получим $x_1x_2 + x_1$. Подставляя вместо x_2 сумму $x_2 + 1$, получим

$$x_1(x_2 + 1) + x_1 = x_1x_2 + x_1 + x_1 = x_1x_2.$$

Приведём пример.

x	y	z	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

	L	M	S	S_0	S_1
f		$-$	$-$	$-$	$+$
g	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$

Найдём канонический многочлен для g.

$$((\neg x \& \neg y \& z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& z)) \equiv$$

$$((\neg y \& z) \vee (\neg x \& y \& z)) \equiv ((\neg y \& z) \vee (\neg x \& z)) \equiv$$

$$((\neg x \vee \neg y) \& z) \equiv (xy + 1)z \equiv (z + xyz).$$

Отсюда видно, что эта функция не является линейной.

Так как

$$f(0,0,0) = 1, f(0,0,1) = 0,$$

то f не является монотонной.

Так как $g(0,0,0) = g(1,1,1)$, то g не является самодвойственной.

В каждом столбце имеем хотя бы один —. Значит, система полна.

Система функций называется базисом, если она сама полна, но выбрасывание из неё любой одной функции делает систему неполной.

Рассматриваемая система является базисом.