2 ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

Множество всех функций, которые задаются F-формулами, называется замыканием F и обозначается через $[F]$.

F называется замкнутым, если $F = [F]$, и полным, если его замыкание совпадает со множеством всех булевых функций.

Имеют место следующие соотношения:

$$[F] \subseteq F$$

$$F \subset G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$$

$$[[F]] = [F]$$

Первые два очевидны. Докажем третье.

Рассмотрим произвольную $[F]$-формулу.

По определению, она имеет вид F-формулы, в которой вместо пропозициональных переменных подставлены $[F]$-формулы. По индукции, можно предполагать, что эти подставляемые $[F]$-формулы являются F-формулами. Легко доказывается индукцией по сложности F-формулы, что если в F-формулу вместо пропозициональных переменных подставить F-формулы, то получим F-формулу.

Приведём теперь примеры полных классов.

Ясно, что классы

$$\{\&,\ \vee,\ \to,\ \neg\}$$

$$\{+,\ *,\ 0,\ 1\}$$

являются полными.

Так как

$$(\Phi \& \Psi) \equiv \neg(\neg\Phi \vee \neg\Psi),$$

$$(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg(\neg\Phi \& \neg\Psi),$$

$$(\Phi \to \Psi) \equiv (\neg\Phi \vee \Psi),$$

$$(\Phi \vee \Psi) \equiv (\neg\Phi \to \Psi),$$

то классы

$$\{\&,\ \neg\}$$

$$\{\vee,\ \neg\}$$

$$\{\to,\ \neg\}$$

тоже полны.

Приведём теперь примеры полных классов, состоящих из одной функции.

Пусть
$$(x|y) = \neg(x\&y)$$
$$(x \downarrow y) = \neg(x \vee y)$$
Так как
$$\neg x \equiv (x|x) \equiv (x \downarrow x),$$
$$(x\&y) \equiv ((x|y)|(x|y)),$$
$$(x \vee y) \equiv ((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)),$$
то классы $\{|\}$ и $\{\downarrow\}$ тоже полные.

Рассмотрим теперь отношение порядка на наборах длины n, отличное от лексикографического порядка.

В этом отношении первый набор меньше второго, если они разные и каждая координата первого набора не превосходит соответствующей координаты второго набора.

Например, набор (1,0,0,1) меньше набора (1,1,0,1). Однако про наборы (1,1,0,0) и (1,0,0,1) нельзя сказать, что первый меньше второго или что второй меньше первого. Такие наборы называются несравнимыми. Поэтому заданный порядок называется частичным.

Булева функция называется монотонной, если она на любом большем наборе не принимает меньшее значение.

Приведём примеры.

x	y	z	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Функция f не является монотонной, а функция g является монотонной.

Обозначим через

L, M, S, S_0, S_1

соответственно классы всех линейных, монотонных, самодвойственных, сохраняющих нуль и сохраняющих единицу функций.

Мы покажем, что эти классы замкнуты.

Замкнутый класс называется максимальным, если он не является полным, но добавление к нему любой не лежащей в нём функции делает этот класс полным.

Мы покажем, что эти пять классов максимальны. Более того, других максимальных классов нет.

Теорема 2.1. *Совокупность функций тогда и только тогда является полной, когда она целиком не содержится ни в каком максимальном классе.*

Доказательство. Если совокупность содержится в каком-то максимальном классе, то её замыкание содержится в замыкании этого класса и отлично от множества всех булевых функций.

Осталось заметить, что каждый неполный класс содержится в некотором максимальном классе.

Занумеруем все булевы функции натуральными числами.

Рассмотрим неполный класс F и обозначим $[F]$ через F_0. Пусть неполные замкнутые классы $F_0, \ldots, F_i$ уже построены так, что

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_i.$$

Если F_i является максимальным классом, то рассматриваемый неполный класс содержится в максимальном. Иначе найдётся булева функция, не лежащая в F_i, добавление которой к F_i не делает полученный класс полным. Мы рассмотрим такую функцию g с наименьшим номером и добавим её к F_i. Пусть

$$F_{i+1} = ([F_i \cup \{g\}]).$$

Объединение всех F_i не содержит функцию $|$, является замкнутым классом и является максимальным классом.

Напомним, что объединение множеств содержит те и только те элементы, которые содержатся хотя бы в одном из объединяемых множеств.

Надо только заметить, что объединение возрастающей последовательности замкнутых классов является замкнутым классом.

Но если рассмотреть формулу, составленной из функций объединения, то все эти функции входят в одно из объединяемых множеств, значит, эта формула задаёт функцию из этого множества.

Если добавление функции с номером k не делает рассматриваемое объединение полным, то оно не делает полным и каждый из объединяемых классов. Но тогда, при определении F_k мы обязаны включить функцию с номером k в F_k. ∎

Теорема 2.2. *Класс линейных функций является замкнутым.*
Класс линейных функций является максимальным.

Доказательство. Мы будем доказывать пять аналогичных теорем. Все эти теоремы доказываются индукцией по сложности формулы.

Базис индукции состоит в том, что тождественная функция одного аргумента, равная своему аргументу, является линейной, монотонной, самодвойственной, сохраняет нуль и сохраняет единицу.

Индукционный шаг состоит в том, что если в функцию этого класса вместо аргументов подставить функции из этого класса, то получим функцию из этого класса.

Итак, пусть

$$f(x_1,\dots,x_m), g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)$$

являются линейными функциями. Пусть

$$f = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \alpha_0,$$

$$g_i = \beta_{i,1} x_1 + \dots + \beta_{i,n} x_n + \beta_{i,0}$$

для $i = 1,\dots,m$.

Тогда

$$f(g_1,\dots,g_m) = \alpha_1(\beta_{1,1}x_1 + \dots + \beta_{1,n}x_n + \beta_{1,0}) + \dots +$$

$$\alpha_m(\beta_{m,1}x_1 + \dots + \beta_{m,n}x_n + \beta_{m,0}) + \alpha_0 =$$

$$(\alpha_1\beta_{1,1} + \dots + \alpha_m\beta_{m,1})x_1 + \dots + (\alpha_1\beta_{1,n} + \dots + \alpha_m\beta_{m,n})x_n +$$

$$(\alpha_1\beta_{1,0} + \dots + \alpha_m\beta_{m,0} + \alpha_0).$$

Пусть теперь мы имеем все линейные функции и какую-то нелинейную. Можно считать, что нелинейная функция имеет вид

$$x_1x_2f(x_3,\ldots,x_n)+x_1g(x_3,\ldots,x_n)+x_2h(x_3,\ldots,x_n)+e(x_3,\ldots,x_n),$$

где f не является нулём. Значит, при некоторых значениях переменных f равно 1. Так как константы являются линейными функциями, мы можем вместо x_3, … , x_n подставить эти значения и получить в замыкании класса линейных функций, расширенного этой нелинейной, функцию

$$x_1x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma.$$

Подставляя теперь вместо x_1 линейную функцию $x_1+\beta$, вместо x_2 линейную функцию $x_2+\alpha$, получим функцию

$$x_1x_2+\beta x_2+\alpha x_1+\alpha x_1+\beta x_2+(\alpha\beta+\gamma).$$

Подставляя эту функцию в функцию $x+(\alpha\beta+\gamma)$, получим произведение x_1x_2. Вместе со сложением и константами мы получаем все булевы функции. Это доказывает максимальность класса линейных функций. ∎

Теорема 2.3. *Класс монотонных функций является замкнутым.*

Класс монотонных функций является максимальным.

Доказательство. Итак, пусть

$$f(x_1, \ldots, x_m), g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

являются монотонными функциями. Рассмотрим два таких набора $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, что первый меньше второго. Это значит, что каждая координата первого набора не превосходит каждой координаты второго, а наборы разные.

Тогда

$$f(g_1, \ldots, g_m)(\bar{\alpha}) = f(g_1(\bar{\alpha}), \ldots, g_m(\bar{\alpha})) \leqslant$$

$$f(g_1(\bar{\beta}), \ldots, g_m(\bar{\beta})) = f(g_1, \ldots, g_m)(\bar{\beta}).$$

Это доказывает замкнутость класса монотонных функций.

Рассмотрим теперь немонотонную функцию g.

Назовём два различных набора значений переменных соседними, если они отличаются только в одной координате.

Например, наборы (1,1,0,1) и (1,0,0,1) соседние, а наборы (1,1,0,0) и (1,0,0,1) не являются соседними.

Пусть $\bar{\alpha}$ меньше $\bar{\beta}$, но значение функции g на первом наборе больше значения этой функции на втором.

Индукцией по числу различных координат у рассматриваемых наборов доказываем следующую лемму.

Лемма 2.4. *Существует такая конечная последовательность наборов*

$$\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m,$$

что каждый следующий набор больше предыдущего и является соседним с предыдущим,

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha}_m = \bar{\beta}.$$

Доказательство. Если наборы соседние, то утверждение очевидно. Иначе, рассмотрим первую координату первого набора, отличную от соответствующей координаты второго набора, и заменим её на 1. Получим набор, соседний с первым. У него меньше координат, отличных от соответствующих координат второго набора. Значит, от полученного набора можно перейти ко второму набору через соседние. ∎

Например, от (0,0,1,0) к (1,0,1,1) можно перейти через (1,0,1,0).

На первом наборе построенной последовательности функция равна 1, на последнем она равна 0. Найдём первый набор этой последовательности, на котором функция равна 0. На предыдущем она равна 1. Мы получили два соседних набора, первый меньше второго, на первом функция равна 1, а на втором она равна 0.

Итак,

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n) = 1,$$

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 1, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Константы являются монотонными функциями.

Подставив в g соответствующие константы, получим функцию h,

$$h(0) = 1, \quad h(1) = 0.$$

h является отрицанием. Так как конъюнкция является монотонной функцией, то имеем конъюнкцию и отрицание. В замыкании получаем все булевы функции. ∎

Теорема 2.5. *Класс самодвойственных функций является замкнутым.*

Класс самодвойственных функций является максимальным.

Доказательство. Итак, пусть

$$f(x_1, \ldots, x_m), g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

являются самодвойственными функциями.

Пусть

$$\neg(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n).$$

Тогда

$$\neg f(g_1, \ldots, g_m)(\neg\bar{\alpha}) = \neg f(g_1(\neg\bar{\alpha}), \ldots, g_m(\neg\bar{\alpha})) =$$

$$\neg f(\neg g_1(\bar{\alpha}), \ldots, \neg g_m(\bar{\alpha})) = f(g_1, \ldots, g_m)(\bar{\alpha}).$$

Это доказывает замкнутость класса самодвойственных функций.

Рассмотрим теперь несамодвойственную функцию g.

Тогда существует набор такой набор $\bar{\alpha}$ значений переменных, что
$$g(\neg\bar{\alpha}) = g(\bar{\alpha}).$$

Отрицание и функция, равная своему аргументу, являются самодвойственными.

Если α_i равно 1, в качестве h_i выберем x, а если α_i равно 0, в качестве h_i выберем $\neg x$. Тогда
$$f = g(h_1, \ldots, h_n)$$
является константой, так как $f(0) = f(1)$. Так как есть отрицание, то в замыкании класса всех самодвойственных функций и рассматриваемой несамодвойственной имеются обе константы.

Рассмотрим функцию

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Эта функция самодвойственна. $f(0, y, z)$ является конъюнкцией. Имея конъюнкцию и отрицание, мы получаем в замыкании все булевы функции. ∎

Теорема 2.6. *Класс сохраняющих 0 функций является замкнутым.*

Класс сохраняющих 0 функций является максимальным.

Класс сохраняющих 1 функций является замкнутым.

Класс сохраняющих 1 функций является максимальным.

Доказательство. Итак, пусть

$$f(x_1, \dots, x_m), g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$$

все сохраняют 0 или все сохраняют 1.

Тогда

$$f(g_1, \dots, g_m)(0, \dots, 0) = f(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_m(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = 0.$$

Это доказывает замкнутость класса функций, сохраняющих 0.

$$f(g_1, \dots, g_m)(1, \dots, 1) = f(g_1(1, \dots, 1), \dots, g_m(1, \dots, 1)) = f(1, \dots, 1) = 1.$$

Это доказывает замкнутость класса функций, сохраняющих 1.

Пусть $g(0,\dots,0)=1$.

Если $g(1,\dots,1)=1$, то мы имеем обе константы, так как 0 сохраняет 0.

Пусть

$$h(0,0)=0,\ h(0,1)=0,\ h(1,0)=1,\ h(1,1)=0.$$

Тогда h сохраняет нуль и $h(1,x)$ есть отрицание.

Если же $g(1,\dots,1)=0$, то $g(x,\dots,x)$ есть отрицание.

Пусть $g(1,\dots,1)=0$.

Если $g(0,\dots,0)=0$, то мы имеем обе константы.

Пусть

$$h(1,1)=1,\ h(1,0)=1,\ h(0,0)=1,\ h(0,1)=0.$$

Тогда h сохраняет единицу и $h(0,x)$ есть отрицание.

Если же $g(0,\dots,0)=1$, то $g(x,\dots,x)$ есть отрицание.

Имея отрицание и конъюнкцию, которая сохраняет и 0, и 1, мы в замыкании получаем все булевы функции. ∎