1 ПОСТРОЕНИЕ СОКРАЩЁННОЙ ДНФ

Напомним, что сокращённая днф для некоторой булевой функции — это дизъюнкция всех максимальных для этой функции элементарных конъюнкций.

Через N_K (N_f) для эк K (булевой функции f) мы обозначаем множество всех наборов значений переменных, на которых эта эк (эта функция) принимает значение 1 (истина).

Эк K называется допустимой для булевой функции f, если

$$N_K \subseteq N_f.$$

Допустимая эк K называется максимальной для f, если для любой эк L из условия

$$N_K \subseteq N_L \subseteq N_f$$

следует, что

$$N_K = N_L.$$

Напомним два булевых тождества

$$((\Phi\&\Psi)\vee\Phi)\equiv\Phi$$

(поглощение),

$$((x\&R)\vee(\neg x\&R'))\equiv((x\&R)\vee(\neg x\&R')\vee(R\&R'))$$

(Блейка).

Теорема 1.1. *Применяя правило Блейка и затем правила поглощения и вычеркивания противоречивых эк, через конечное число шагов получим сокращённую днф*

Перед доказательством рассмотрим пример.

x	y	z	f		
0	0	0	1	$+$	$(\neg x \& \neg y \& \neg z)$
0	0	1	0		
0	1	0	1	$+$	$(\neg x \& y \& \neg z)$
0	1	1	1	$+$	$(\neg x \& y \& z)$
1	0	0	1	$+$	$(x \& \neg y \& \neg z)$
1	0	1	1	$+$	$(x \& \neg y \& z)$
1	1	0	0		
1	1	1	1	$+$	$(x \& y \& z)$

Выписываем совершенную днф

$$((\neg x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee$$

$$(x \& \neg y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& z) \vee (x \& y \& z))$$

Применяя правило Блейка один раз и потом ещё несколько раз это правило и правило поглощения, получаем

$$(((\neg x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee$$

$$(x \& \neg y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& z) \vee (x \& y \& z))$$

$$\vee (\neg x \& \neg z)) \equiv$$

$$((\neg x \& \neg z) \vee (\neg x \& y) \vee (\neg y \& \neg z) \vee (x \& \neg y) \vee (x \& z) \vee (y \& z))$$

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Назовём эк противоречивой, если среди её конъюнктивных членов есть одновременно и буква, и отрицание этой буквы.

Противоречивая эк не имеет точек истинности.

Если непротиворечивая эк содержит все буквы, то она имеет ровно одну точку истинности.

Например, для $(\neg x \& y \& \neg z)$ — это (0,1,0).

Скажем, что элементарная конъюнкция K покрывается днф D, если существует эк K' в D такая, что

$$N_K \subset N_{K'}$$

Пусть методом Блейка уже нельзя дописать новых эк.

Покажем, что каждая допустимая эк тогда покрывается D.

Это будем доказывать обратной индукцией по числу букв в рассматриваемой допустимой эк K.

Если входят все буквы, то N_K состоит из одной точки.

$$N_K \subset N_D$$

Если x не входит в K, то $(x \& K)$ и $(\neg x \& K)$ допустимы и покрываются D.

$$N_{(x \& K)} \subset N_{K_1}, \quad N_{(\neg x \& K)} \subset N_{K_2}$$

Если при этом K_1 или K_2 не содержит x, то она покрывает K.

Иначе

$$((x \& K') \vee (\neg x \& K'')) \equiv$$
$$((x \& K') \vee (\neg x \& K'') \vee (K' \& K''))$$

∎