5 ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Определение 5.0.1. *Отношение E эквивалентности на Σ^* называется отношением конгруэнтности или конгруэнтностью, если для любых таких x, y из Σ^*, для которых выполняется $E(x, y)$, и любых u, v из Σ^* выполняется $E(uxv, uyv)$.*

Напомним, что отношение называется отношением эквивалентности, если оно является симметричным, транзитивным и рефлексивным.

С каждым отношением эквивалентности, как известно, связывается разбиение множества, на котором задано это отношение, на классы попарно эквивалентных элементов, называемые классами эквивалентности по этому отношению. Отношение эквивалентности имеет конечный индекс, если множество этих классов конечно. Число этих классов тогда называется индексом рассматриваемого отношения эквивалентности.

Пример 5.0.1. С каждым словом a свяжем число $n_0(a)$ нулей и число $n_1(a)$ единиц в этом слове a. Два числа a и b назовём эквивалентными, если либо

$$(n_0(a) - n_1(a))(n_0(b) - n_1(b)) > 0,$$

либо

$$(n_0(a) - n_1(a)) = (n_0(b) - n_1(b)) = 0.$$

Очевидно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Оно также транзитивно. Имеется всего три класса эквивалентности:

к первому относятся слова a, для которых $(n_0(a) - n_1(a)) > 0$,

ко второму — слова a, для которых $(n_0(a) - n_1(a)) < 0$,

к третьему — слова a, для которых $(n_0(a) - n_1(a)) = 0$.

Но это отношение не является отношением конгруэнтности, так как слова "1110" и "111110" эквивалентны, но слова "001110" и "00111110" не являются эквивалентными.

Назовём теперь два слова эквивалентными, если в них одинаковое число единиц. Понятно, что это отношение является отношением конгруэнтности. Однако множество классов эквивалентности будет бесконечным, так как в слове возможно любое число единиц.

В случае, когда два слова эквивалентны, если в каждом из них нечётное число единиц, заданное отношение не является отношением эквивалентности, так как оно не является рефлексивным, ибо слово "1111" не связано этим отношением с самим собой.

Если эквивалентность слов алфавита, состоящего из 0 и 1, означает, что в словах одинаковая чётность нулей и единиц, другими словами, в каждом из слов либо число нулей и число единиц оба чётны, либо оба нечётны, либо первое чётно, а второе нечётно, либо первое нечётно, а второе чётно, то это отношение является отношением конгруэнтности, а число классов эквивалентности по этому отношению равно четырём.

С каждым конечным автоматом $M =< \Sigma,\ Q,\ q_0,\ Q_{\text{закл}},\ \Phi >$ связывается следующее отношение $E(M)$ на Σ^*:

$$E(M)(x, y) \Longleftrightarrow (\Phi(q, x) = \Phi(q, y) \text{ для любого } q \in Q).$$

Теорема 5.1. *Для любого конечного автомата M отношение $E(M)$ является отношением конгруэнтности конечного индекса.*

Доказательство. Симметричность и рефлексивность этого отношения очевидны. Проверим, что это отношение транзитивно. В самом деле, если $\Phi(q, x) = \Phi(q, y)$ и $\Phi(q, y) = \Phi(q, z)$, то $\Phi(q, x) = \Phi(q, z)$. С каждым словом x связывается отображение $f_x : Q \to Q$, задаваемое условием: $f_x(q) = \Phi(q, x)$. Ясно, что $E(M)(x, y)$, по определению, означает, что $f_x = f_y$. Поэтому различных классов эквивалентности не больше, чем различных отображений из Q в Q, то есть, не больше, чем $|Q|^{|Q|}$. Следовательно, $E(M)$ является отношением эквивалентности конечного индекса.

Проверим теперь, что $E(M)$ является отношением конгруэнтности. Пусть $E(M)(x, y)$ и $u, v \in \Sigma^*$. Пусть $q \in Q$. Тогда $f_x(f_u(q)) = f_y(f_u(q))$. Поэтому $f_v(f_x(f_u(q))) = f_v(f_y(f_u(q)))$. Это показывает, что $\Phi(q, uxv) = \Phi(q, uyv)$. Так как это имеет место для любого $q \in Q$, то это означает, что $E(M)(uxv, uyv)$. ∎

Заметим, что язык $L(M)$, задаваемый автоматом M, состоит из всех таких слов $x \in \Sigma^*$, что $f_x(q_0) \in Q_{\text{закл}}$. Поэтому, если $E(M)(x,y)$ и, значит, $f_x = f_y$, то слова x и y одновременно принадлежат или не принадлежат $L(M)$. Следовательно, вместе с каждым словом x язык $L(M)$ содержит также и все слова, эквивалентные x по отношению $E(M)$, и, значит, $L(M)$ является объединением нескольких классов эквивалентности по отношению $E(M)$.

Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 5.2. *Каждый автоматный язык является объединением нескольких классов эквивалентности по некоторому отношению конгруэнтности конечного индекса.*

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 5.3. *Объединение нескольких классов эквивалентности по отношению конгруэнтности конечного индекса является автоматным языком.*

Доказательство. Рассмотрим отношение E конгруэнтности конечного индекса на множестве Σ^*. Пусть $q_1, \ldots, q_s$ — все классы эквивалентности по этому отношению, перечисленные без повторений. Будем предполагать, что q_1 содержит пустое слово λ, а рассматриваемое объединение есть объединение классов $q_k, \ldots, q_m$, где $k = 1$, если пустое слово входит в это объединение, и $k = 2$ в остальных случаях. При этом $m \leqslant s$.

Автомат M, задающий рассматриваемое объединение, задаётся следующим образом:

$$M =< \Sigma, Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}, q_1, \{q_k, \ldots, q_m\}, \Phi >,$$

где $\Phi(q, a)$ — это класс, содержащий ba для некоторого $b \in q$. Для доказательства корректности этого определения достаточно заметить, что верно $E(b_1 a, b_2 a)$ для любых $b_1, b_2 \in q$.

Через qa для состояния q и слова $a \in \Sigma^*$ будем обозначать класс эквивалентности, содержащий слово ba для некоторого $b \in q$. Из определения сразу следует, что этот автомат, находясь в состоянии q, после прочтения слова a переходит в состояние qa. Следовательно, начав с начального состояния и прочитав слово a, автомат переходит в состояние, содержащее слово a. Поэтому слово воспринимается построенным автоматом тогда и только тогда, когда оно лежит в заданном объединении классов эквивалентности. ∎