4 ПРИМЕРЫ

Пример 4.0.1.

Построим задающий тот же язык детерминированный автомат для автомата:

	0	1
начальное $q1$	$q8$	$q2$
$q2$	$q3$	$q8$
$q3$	$q8$	$q4$, $s0$
$q4$	$q6$	$q5$
$q5$	$q6$	$q5$
$q6$	$q7$	$q4$, $s0$
$q7$	$q7$	$q5$
$q8$	$q8$	$q8$
заключительное $s0$	$s1$	$s0$
$s1$	$s0$	$s1$

Всего было бы $2^{10} = 1024$ состояния. К счастью, многие состояния нам не потребуются.

	0	1
начальное $q1$	$q8$	$q2$
$q2$	$q3$	$q8$
$q3$	$q8$	$\{q4,\ s0\}$
$q4$	$q6$	$q5$
$q5$	$q6$	$q5$
$q6$	$q7$	$\{q4,\ s0\}$
$q7$	$q7$	$q5$
$q8$	$q8$	$q8$
заключительное $s0$	$s1$	$s0$
$s1$	$s0$	$s1$
заключительное $\{s0,\ q4\}$	$\{q6,\ s1\}$	$\{q5,\ s0\}$
заключительное $\{s0,\ q5\}$	$\{q6,\ s1\}$	$\{q5,\ s0\}$
$\{s1,\ q6\}$	$\{q7,\ s0\}$	$\{q4,\ s1,\ s0\}$
заключительное $\{s0,\ q7\}$	$\{q7,\ s1\}$	$\{q5,\ s0\}$
$\{s1,\ q7\}$	$\{q7,\ s0\}$	$\{q5,\ s1\}$
$\{s1,\ q5\}$	$\{q6,\ s0\}$	$\{q5,\ s1\}$
заключительное $\{s0,\ q6\}$	$\{q7,\ s1\}$	$\{q4,\ s0\}$
заключительное $\{s1,\ s0,\ q4\}$	$\{q6,\ s1,\ s0\}$	$\{q5,\ s0,\ s1\}$
заключительное $\{s1,\ s0,\ q5\}$	$\{q6,\ s1,\ s0\}$	$\{q5,\ s0,\ s1\}$
заключительное $\{s1,\ s0,\ q6\}$	$\{q7,\ s1,\ s0\}$	$\{q4,\ s0,\ s1\}$
заключительное $\{s0,\ s1,\ q7\}$	$\{q7,\ s1,\ s0\}$	$\{q5,\ s0,\ s1\}$

Пример 4.0.2.

Построим теперь ещё один пример недетерминированного автомата, задающего конкатенацию двух автоматных языков.

Первый язык задаётся следующим автоматом:

	0	1
начальное, заключительное $s0$	$s1$	$s0$
$s1$	$s0$	$s1$

Легко видеть, что этот язык содержит те и только те слова, в которых чётное число нулей.

Второй язык задаётся следующим автоматом.

	0	1
начальное $q0$	$q0$	$q1$
заключительное $q1$	$q1$	$q0$

Этот язык содержит те и только те слова, в которых нечётное число единиц.

Конкатенация задаётся следующим автоматом:

	0	1
начальное q	$s1,\ q0$	$s0,\ q1$
$s0$	$s1$	$s0,\ q0$
$s1$	$s0,\ q0$	$s1$
$q0$	$q0$	$q1$
заключительное $q1$	$q1$	$q0$

Построим теперь недетерминированный автомат, задающий итерацию автоматного языка.

Рассмотрим язык, состоящий из слов, в которых либо чётное число нулей, либо нечётное число единиц. Этот язык можно задать следующим конечным автоматом:

	0	1
начальное заключительное q	$s1,\ q0$	$s0,\ q1$
заключительное $s0$	$s1$	$s0$
$s1$	$s0$	$s1$
$q0$	$q0$	$q1$
заключительное $q1$	$q1$	$q0$

Итерация задаётся следующим конечным автоматом:

	0	1
начальное, заключительное q	$s1,\ q0$	$s0,\ q,\ q1$
$s0$	$s1$	$s0,\ q$
$s1$	$s0,\ q$	$s1$
$q0$	$q0$	$q1,\ q$
$q1$	$q1,\ q$	$q0$

Определение 4.0.1. *Отображение $\pi : \Sigma^* \to \Delta^*$ называется гомоморфизмом, если оно удовлетворяет условиям:*
$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ *для любых* $a, b \in \Sigma^*$*;*
$\pi(\lambda) = \lambda$*, где* λ *— пустое слово.*

Для задания гомоморфизма достаточно задать образ каждой буквы. Тогда образ слова является конкатенацией образов букв этого слова. Например, если $\Sigma = \{0,\ 1\}$, $\Delta = \{a,\ b\}$, $\pi(0) = aba$, $\pi(1) = a$, то $\pi(00101) = abaabaaabaa$.

Язык является множеством слов. Образ языка при гомоморфизме $\pi : \Sigma^* \to \Delta^*$ — это совокупность всех образов слов из этого языка.

$$\pi(L) = \{\pi(a) \ \mid \ a \in L\}, \quad L \subseteq \Sigma^*.$$

Прообраз языка при гомоморфизме $\pi : \Sigma^* \to \Delta^*$ — это множество всех слов, образы которых лежат в этом языке.

$$\pi^{-1}(L) = \{a \in \Sigma^* \ \mid \pi(a) \in L\}, \quad L \subseteq \Delta^*.$$

Оказывается, что образ и прообраз автоматного языка при гомоморфизме снова являются автоматными языками.

Теорема 4.1. *Образ автоматного языка при гомоморфизме снова является автоматным языком.*

Доказательство. Рассмотрим язык $L \subseteq \Sigma^*$ и гомоморфизм $\pi : \Sigma^* \to \Delta^*$. Пусть $\pi(L) = \{\pi(a) \mid a \in L\}$. Пусть конечный детерминированный автомат $M =< \Sigma, Q, q_0, Q_{\text{закл}}, \Phi >$ задаёт язык L.

Для непустого слова $d \in \Sigma^*$ и состояния $q \in Q$ индукцией по длине этого слова определим состояние $\Phi(q, d)$. Если длина слова равна 1, это состояние задано. Полагаем $\Phi(q, ad) = \Phi(\Phi(q, a), d)$ для любой буквы $a \in \Sigma$.

Как уже замечалось, можно считать, что что автомат M не имеет правил вида $< q, a, q_0 >$.

Построим конечный автомат $M' = \langle \Delta, Q', q_0, Q_{\text{закл}}, \Psi \rangle$, задающий язык $\pi(L)$. Если L содержит пустое слово, $q_0 \in Q_{\text{закл}}$. В противном случае, если $\pi(a)$ пусто для некоторого $a \in L$, мы добавим q_0 к $Q_{\text{закл}}$.

Пусть $|\pi|$ — наибольшая из длин слов $\pi(a)$, когда a пробегает Σ, другими слова, наибольшая из длин образов букв. Пусть

$$Q' = Q \cup \{q_a \mid q \in Q,\ a \in \Delta^*,\ 0 < |a| \leqslant |\pi|\}.$$

Как обычно, λ обозначает пустое слово. q_λ есть q.

Определим Ψ. Идея состоит в том, что находясь в состоянии q_a и обозревая букву b, автомат либо переходит в состояние q_{ab}, если длина ab всё ещё не превосходит $|\pi|$, либо в любое из состояний $\Phi(q, c)$, если $\pi(c) = ab$.

$$\Psi = \{(q_a, b, q_{ab}), (q_a, b, \Phi(q, c)), (q, b, r_b) \mid |ab| \leqslant |\pi|;\ c \in \Sigma;$$
$$\pi(d) = \lambda;\ \Phi(q, d) = r;\ d \in \Sigma^*;\ a \in \Delta^*;\ b \in \Delta;\ r, q \in Q;\ \pi(c) = ab\}.$$

Докажем, что построенный недетерминированный автомат M' действительно задаёт язык $\pi(L)$.

Пусть непустое слово является образом слова из L.

Для слова a из Σ^*, образ которого непуст, и произвольного состояния $q \in Q$ индукцией по длине слова докажем, что

$$(q, \pi(a)) \Rightarrow^+_{M'} (\Phi(q, a), \lambda).$$

Пусть $a = bc$, $\pi(b) = \lambda$, а образ первой буквы c непуст. Тогда

$$\Phi(q,b) = s;\ c = dc';\ d \in \Sigma;\ c' \in \Sigma^*;$$
$$(q, \pi(a)) \Rightarrow^{+}_{M'} (\Phi(s,d), c')$$

и осталось использовать индукционное предположение.

В частности, если слово a принадлежит L, то $\Phi(q_0, a)$ является заключительным состоянием и образ слова воспринимается построенным автоматом.

Пусть теперь непустое слово воспринимается построенным автоматом. Докажем, что рассматриваемое слово является образом слова из рассматриваемого языка.

Индукцией по длине непустого слова $a \in \Delta^*$ докажем, что

$$(q,a) \Rightarrow^{+}_{M'} (s, \lambda),$$

где $q, s \in Q$, тогда и только тогда, когда существует такое слово $b \in \Sigma^*$, что $\Phi(q,b) = s$ и $\pi(b) = a$.

Пусть $a = a_1 a'$, где $a_1 \in \Delta$ и $a' \in \Delta^*$. Тогда

$$(q,a) \Rightarrow^{1}_{M'} (r_{a_1}, a')$$

или

$$(q,a) \Rightarrow^{1}_{M'} (\Phi(r,c), a')$$

для некоторой такой буквы $c \in \Sigma$, что $\pi(c) = a_1$, где либо $q = r$, либо $\Phi(q,d) = r$ для некоторого такого $d \in \Sigma^*$, что $\pi(d) = \lambda$.

Во втором случае можно сразу использовать индукционное предположение. Существует такое слово b', что $\pi(b') = a'$ и

$$\Phi(\Phi(r,c), b') = s.$$

Поэтому $\pi(dcb') = a$ и $\Phi(q, dcb') = s$ для некоторого $d \in \Sigma^*$.

В первом случае необходимо считывать дальнейшие буквы, пока не получится образ некоторой буквы, после чего аналогичным образом можно использовать индукционное предположение. ∎

Частным случаем гомоморфизма является *проекция*. При проекции слова алфавита Σ отображаются в слова этого же алфавита. Для задания проекции выделяется некоторый подалфавит и в каждом слове все буквы, не принадлежащие выделенному подалфавиту, вычеркиваются. Проекция поэтому является таким гомоморфизмом, при котором образами некоторых букв являются сами эти буквы, а образами оставшихся букв являются пустые слова.

Следствие 4.2. *Проекция автоматного языка является автоматным языком.*

Теорема 4.3. *Прообраз автоматного языка при гомоморфизме является снова автоматным языком.*

Доказательство. Рассмотрим язык $L \subseteq \Delta^*$ и гомоморфизм $\pi : \Sigma^* \to \Delta^*$. Пусть $\pi^{-1}(L) = \{a \in \Sigma^* \mid \pi(a) \in L\}$. Пусть конечный детерминированный автомат $M =< \Delta, Q, q_0, Q_{\text{закл}}, \Phi >$ задаёт язык L. Если L содержит пустое слово, $q_0 \in Q_{\text{закл}}$.

Построим конечный автомат $M' = \langle \Sigma, Q, q_0, Q_{\text{закл}}, \Psi \rangle$, задающий язык $\pi^{-1}(L)$. Нужно только задать Ψ. Мы полагаем

$$\Psi(q, a) = \Phi(q, \pi(a)),$$

если $\pi(a)$ не является пустым словом, и полагаем

$$\Psi(q, a) = q,$$

если $\pi(a)$ является пустым словом, для любой буквы $a \in \Sigma$ и любого состояния $q \in Q$. Построенный автомат является детерминированным. Договоримся, что

$$\Phi(q, \lambda) = \Psi(q, \lambda) = q$$

для любого состояния $q \in Q$. Очевидно, что $\Phi(q, \pi(a)) = \Psi(q, a)$ для любых $q \in Q$, $a \in \Sigma^*$. Это доказывает теорему. ∎

Приведём пример.

Пример 4.0.3.

Построим конечный автомат, задающий гомоморфный образ языка, содержащего все слова, начинающиеся на 101 и заканчивающиеся на 101, и только такие слова, при гомоморфизме ψ:

$$\psi(0) = aa, \quad \psi(1) = ba.$$

Нам уже известно, что следующий конечный автомат M задаёт язык, состоящий из тех и только тех слов, составленных из букв 0 и 1, которые начинаются и оканчиваются на "101". Автомат M' задаёт гомоморфный образ этого языка.

M	$q1$ начальное	$q2$	$q3$	$q4$ заключительное	$q5$	$q6$	$q7$	$q8$
0	$q8$	$q3$	$q8$	$q6$	$q6$	$q7$	$q7$	$q8$
1	$q2$	$q8$	$q4$	$q5$	$q5$	$q4$	$q5$	$q8$

M'	a	b
начальное $q1a$	$q8$	$q2b$
$q1b$	$q1a$	$q8$
$q2a$	$q3b$	$q8$
$q2b$	$q2a$	$q8$
$q3a$	$q8$	$q4b$
$q3b$	$q3a$	$q8$
заключительное $q4a$	$q6b$	$q5b$
$q4b$	$q4a$	$q8$
$q5a$	$q6b$	$q5b$
$q5b$	$q5a$	$q8$
$q6a$	$q7b$	$q4b$
$q6b$	$q6a$	$q8$
$q7a$	$q7b$	$q5b$
$q7b$	$q7a$	$q8$
$q8$	$q8$	$q8$

Каждая чётная буква должна быть a. Нечётная буква определяет следующее состояние.