1979 г. март—апрель *т. 34, вып. 2 (206)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СВОЙСТВАХ ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

В. Я. Беляев, М. А. Тайцлин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Среди глобальных характеристик счетных элементарных теорий давно уже рассматривают такие, как разрешимость или, более тонко, алгоритмическая сложность теории в той или другой иерархии сложностей. С другой стороны, теории можно делить на категоричные в несчетных мощностях; суперстабильные, но не категоричные; стабильные, но не суперстабильные; нестабильные.

Одной из глобальных характеристик теории является также класс систем, экзистенциально замкнутых в этой теории. Грубо говоря, система называется экзистенциально замкнутой в теории T, если эта система изоморфно вкладывается в некоторую систему теории T и если всякая конечная совокупность формул, каждая из которых является либо атомной, либо отрицанием атомной, с константами из этой системы, имеющая решение в некотором T-расширении этой системы, имеет решение и в самой этой системе. Более формальное определение приведено в § 2.

Экзистенциально замкнутые системы — алгебраически замкнутые поля — издавна играют важную роль в теории полей и плодотворно используются в алгебраической геометрии. В последнее время П. Кон связывает изучение этого понятия в теории тел с попытками создания некоммутативной алгебраической геометрии (см. [32]). Вместе с тем еще в 1951 г. В. Скотт в [58] ввел понятие алгебраически замкнутой группы, а Б. Нейман в [50] обнаружил некоторые интересные свойства таких групп. Он же продолжил эти исследования через двадцать лет в [52], а в работах [49], [51] изучал алгебраически замкнутые полугруппы.

Однако настоящий интерес к экзистенциально замкнутым системам возник после того, как в работах [26], [53] — [56] А. Робинсон разработал метод теоретико-модельного форсинга. Форсинг позволил строить генерические системы, а все они — экзистенциально замкнуты. Сразу возникший вопрос о числе генерических систем вызвал к жизни и вопрос о числе попарно элементарно неэквивалентных экзистенциально замкнутых систем. Возникли понятия форсинг-компаньона и другие, в какой-то мере связанные с понятием экзистенциальной замкнутости. Подобным вопросам сейчас уже посвящено много работ. Это, в частности, работы [23], [24], [27] — [30], [34] — [37], [40], [43], [57], [59], [61] — [63], [65], [68], [71] — [74].

А. Макинтайр в работах [45], [46] впервые применил форсинг для построения алгебраически замкнутых групп. Он же в [47] и У. Уилер в [67] использовали форсинг в теории тел, а Дж. Гиршфельд в [42] — в арифметике. М. А. Тайцлин изучал с помощью форсинга экзистенциально замкнутые системы в коммутативных полугруппах ([18], [20]), регулярных коммутативных полугруппах ([18], [21]), а М. А. Тайцлин в [19] и Г. Черлин в [60] — в коммутативных ассоциативных кольцах. Дальнейшее продвижение в изучении алгебраических замкнутых групп с помощью форсинга содержится в работах О. В. Белеградека [2] — [5], полугрупп — в работах В. Я. Беляева [6], [8].

Некоторую неудовлетворительность при изучении упомянутых работ вызывало то обстоятельство, что аналогичные результаты в различных теориях доказывались с использованием специфических средств. Поэтому принципиально важной стала работа М. Ю. Трофимова [22], где впервые были выделены некоторые общие условия, при выполнении которых все арифметические подсистемы становятся определимыми в классе экзистенциально замкнутых систем. Нужно, однако, отметить, что в [22] имеются ссылки на неопубликованные рукописи О. В. Белеградека и В. Я. Беляева.

Нами выделен некоторый класс теорий, удовлетворяющих естественным и сравнительно простым теоретико-модельным условиям. Это позволило получить известные и ряд новых (даже для алгебраически замкнутых групп) результатов единым методом, тогда как раньше доказательства существенно использовали специфику групп, тел, полугрупп.

Мы собирались сделать изложение по возможности понятным многим математикам. Это, однако, привело к необходимости предварить основной материал вспомогательными параграфами. Некоторым оправданием для нас является то, что материал этих параграфов имеет и самостоятельный интерес.

Работа состоит из 9 параграфов.

В § 0 мы кратко напоминаем нужные в дальнейшем сведения из теории рекурсивных функций. Хотя почти все это имеется в книге [17], связное изложение позволит читать нашу статью и тем, кто не изучал книгу [17]. § 1 содержит описание некоторых неэлементарных логик и их эквивалентности. § 2 посвящен теоретико-модельному форсингу, который находит теперь применение в теории моделей. § 3 является главным в работе. Здесь содержится определение богатой теории и теоремы о свойствах таких теорий. Главный новый результат здесь — теорема о том, что класс n-порожденных систем является элементарно определимым в классе экзистенциально замкнутых систем тогда и только тогда, когда он конечно аксиоматизируем в слабой логике порядка ω. §§ 4—7 содержат примеры богатых теорий. Наиболее существенные новые результаты здесь — это то, что богатыми являются теории инверсных полугрупп и ассоциативных колец. § 8 содержит список открытых вопросов. Этот список показывает, что дальнейшее изучение экзистенциально замкнутых систем представляется интересным занятием.

Наши занятия этой темой во многом были определены решающим влиянием работ Олега Вильгельмовича Белеградека и бесед с ним. Мы благодарны О. В. Белеградеку также за то, что он внимательно прочитал рукопись и высказал много полезных замечаний.

§ 0. Аналитическая и арифметическая иерархии

В этом параграфе мы приведем сведения по теории рекурсивных функций, которые нам понадобятся в основном тексте. Почти во всем мы будем следовать книге Х. Роджерса [17]. Предполагается, что читатель знаком с первоначальными понятиями теории рекурсивных функций.

Множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$ мы обозначаем буквой N. $K(x, y)$ есть универсальная функция Клини, т. е. такая частично рекурсивная функция двух переменных, что для любой одноместной частично рекурсивной функции ψ найдется такая x, что ψ есть $\lambda y K(x, y)$, т. е. $K(x, y)$ при фиксированном x как функция от y. Функция $\lambda y K(x, y)$ обозначается через φ_x, а ее область определения — через W_x. Семейство $\{W_x \mid x \in N\}$ является семейством всех рекурсивно перечислимых множеств. Мы фиксируем некоторую общерекурсивную функцию $\varkappa$, отображающую одно-однозначную $N \times N$ на N. Образ пары чисел $\langle x, y\rangle$ при этом отображении мы обозначаем через

$$\varkappa(x, y), \ \varkappa(\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) = \varkappa(x_1, \ldots, x_n).$$

Фиксируем также следующую эффективную нумерацию всех конечных подмножеств множества N. Множеству $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ с попарно различными $x_1, \ldots, x_n$ сопоставляем номер $u = 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_n}$, а само D обозначаем через D_u. Пустому множеству $\varnothing$ присваиваем номер 0. Ясно, что эта нумерация устанавливает одно-однозначное соответствие между N и множеством всех конечных подмножеств N.

В нашем дальнейшем изложении существенную роль будет играть относительная рекурсивность. Если A — некоторое подмножество N, то рекурсивность функции f относительно A означает существование алгоритма, состоящего из конечного числа инструкций и вычисляющего f, но в процессе вычисления могут встречаться шаги, на которых для некоторых уже вычисленных натуральных чисел n задается вопрос о том, принадлежит ли n к A, и в зависимости от ответа вычисление продолжается по тому или иному пути. Такой алгоритм мы называем обобщенным алгоритмом с оракулом A. Заметим, что само описание алгоритма от множества A не зависит, для одних и тех же инструкций с изменением A меняется и вычисляемая функция. Сейчас приведем формальное определение.

Фиксируем общерекурсивную функцию $\rho(z)$ со свойствами:

(i) для всех z множество $W_{\rho(z)}$ удовлетворяет уловиям:

а) если $\varkappa(x, y, u, v) \in W_{\rho(z)}$, то $D_u \cap D_v = \varnothing$;

б) если $\varkappa(x, y_1, u_1, v_1)$ и $\varkappa(x, y_2, u_2, v_2)$ из $W_{\rho(z)}$ и $\varkappa(x, y_1, u_1, v_1) \neq \neq \varkappa(x, y_2, u_2, v_2)$, то либо $D_{u_1} \cap D_{v_2} \neq \varnothing$, либо $D_{u_2} \cap D_{v_1} \neq \varnothing$;

(ii) для всех z, если W_z удовлетворяет условиям а) и б), то $W_{\rho(z)} = W_z$.

Чтобы задать $\rho(z)$, нужно равномерно по z каждый алгоритм перечисления W_z переделать в алгоритм перечисления $W_{\rho(z)}$. Эта процедура заключается в том, что перебирая W_z, мы пропускаем элементы $\varkappa(x, y, u, v)$, которые либо не удовлетворяют условию а), либо с некоторым из уже перечисленных $\varkappa(x', y', u', v')$ не удовлетворяют условию б).

Для $A \subseteq N$ и $z \in N$ определяем функцию φ_z^A, полагая

$$\varphi_z^A(x) = y \Longleftrightarrow (\exists u)(\exists v)[\varkappa(x, y, u, v) \in W_{\rho(z)} \wedge D_u \subseteq A \wedge D_v \subseteq \overline{A}],$$

где $\overline{A}$ — дополнение A до N.

Функция ψ называется A-частично рекурсивной, если ψ есть φ_z^A для некоторого z. Если при этом ψ всюду определена, то ψ называется A-общерекурсивной. Мы говорим также, что ψ частично рекурсивна (общерекурсивна) относительно A. В определении φ_z^A число z можно понимать как код обобщенного алгоритма с оракулом A для вычисления φ_z^A. Для данного z по произвольному x мы можем определить последовательность шагов вычисления $\varphi_z^A(x)$ (начинаем перебирать $W_{\rho(z)}$ и для элементов вида $\varkappa(x, y, u, v)$, встречающихся при этом, проверяем с помощью оракула условия $D_u \subseteq A$ и $D_v \subseteq \subseteq \overline{A}$). Каждый шаг в этой последовательности получает свой номер, и если окажется, что $\varphi_z^A(x) = y$, то мы скажем, что для некоторого числа w «$\varphi_z^A(x)$ вычисляется на шаге w и принимает значение y».

Пусть A и B — множества натуральных чисел. Говорим, что A рекурсивно относительно B или что A сводится по Тьюрингу к B, и пишем $A \leqslant {}_TB$, если характеристическая функция множества A является B-общерекурсивной. A называется рекурсивно перечислимым относительно B, если A пусто или существует B-общерекурсивная функция f такая, что $f(N) = A$. С интуитивной точки зрения A рекурсивно относительно B, если существует обобщенный алгоритм с оракулом B, дающий для любого $x \in N$ за конечное число шагов ответ на вопрос, лежит ли x в A, и A рекурсивно перечислимо относительно B, если существует обобщенный алгоритм с оракулом B, перечисляющий в некотором порядке все элементы множества A. В дальнейшем при доказательствах относительной рекурсивности или рекурсивной перечислимости мы будем ограничиваться приведением неформального алгоритма. Разумеется, все доказательства могут быть проведены и строго формально.

Легко видеть, что отношение $\leqslant_T$ на множестве всех подмножеств N рефлексивно и транзитивно. Для $A \subseteq N$ и $B \subseteq N$ положим $A \equiv {}_TB$, если $A \leqslant {}_TB$ и $B \leqslant {}_TA$. Тогда $\equiv_T$ есть отношение эквивалентности на множестве всех подмножеств N. Классы эквивалентности по этому отношению называются тьюринговыми степенями. Если a и b — тьюринговы степени, то пишем $a \leqslant b$, если $A \leqslant {}_TB$ для $A \in a$ и $B \in b$. Отношение $\leqslant$ на тьюринговых степенях задает частичный порядок. Пишем $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Степень, в которой содержится множество A, обозначим через $d(A)$.

Если A, $B \subseteq N$, то

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

Легко проверить, что степень $d(A \oplus B)$ является точной верхней гранью степеней $d(A)$ и $d(B)$. Значит, отношение $\leqslant$ на множестве тьюринговых степеней является верхней полурешеткой. Точная верхняя грань степеней a и b обозначается через $a \cup b$.

Через W_x^A обозначим область определения функции φ_x^A. Легко видеть, что $\{W_x^A \mid x \in N\}$ есть семейство всех A-рекурсивно перечислимых множеств. Например, если z_0 таково, что

$$W_{z_0} = \{\varkappa(x, 1, 2^x, 0) \mid x \in N\},$$

то $W_{z_0}^A = A$ для всех A.

Множество $\{x \mid x \in W_x^A\}$ называется скачком множества A и обозначается через A'. Легко видеть, что A' рекурсивно перечислимо относительно A, причем алгоритм перечисления от A не зависит в том смысле, что существует такое z_1, что $W_{z_1}^A = A'$ для всех A. Известно, что любое множество B, рекурсивно перечислимое относительно A, 1-сводится к A', т. е. существует такая одно-однозначная общерекурсивная функция f, что $x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A'$ для каждого натурального x. Если $A \leqslant {}_TB$, то A' рекурсивно перечислимо относительно B и по предыдущему A' 1-сводится к B'. Это показывает корректность определения a' для тьюринговой степени a как $d(A')$ для $A \in a$. Легко видеть, что $a \leqslant a'$ и $a \neq a'$. Степень a' называется скачком степени a.

$$A^{(n+1)} = (A^{(n)})', \quad a^{(n+1)} = (a^{(n)})'.$$

Класс всех рекурсивных множеств образует одну тьюрингову степень, обозначаемую через 0. Имеем строго возрастающую последовательность степеней $0, 0', \ldots$ Через $\varnothing^{(\omega)}$ обозначается множество $\{\varkappa(x, y) \mid x \in \varnothing^{(y)}\}$, а через $0^{(\omega)}$ обозначается $d(\varnothing^{(\omega)})$. Ясно, что $0^{(n)} < 0^{(\omega)}$ для каждого натурального n.

Фиксируем счетную сигнатуру, т. е. набор символов операций и предикатов с указанием их местностей, в которой для каждого n присутствует бесконечно много символов предикатов местности n и символов операций этой местности. Эту сигнатуру на протяжении этого параграфа мы обозначаем символом Ω. Символы последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будут играть роль предметных переменных. Договоримся, что заключенный в скобки верхний индекс у сигнатурного символа указывает его местность.

Арифметикой мы будем называть алгебраическую систему $\langle N; 0, ', +, \cdot\rangle$ сигнатуры $\langle 0, ', +, \cdot\rangle$. Символы $0, ', +, \cdot$ интерпретируются в арифметике как нуль и как обычные операции прибавления единицы, сложения и умножения и предполагаются не лежащими в Ω. Формулами арифметики мы будем называть формулы логики предикатов первого порядка сигнатуры $\langle 0, ', +, \cdot, \Omega\rangle$. Формулами второго порядка арифметики будем называть формулы логики предикатов второго порядка, в которых допускаются кванторы существования и всеобщности по символам из Ω и по предметным переменным, других кванторов нет, а сами эти формулы строятся по известным правилам из символов $0, ', +, \cdot$, а также символов из Ω и логических символов. В частности, любая формула арифметики является формулой второго порядка арифметики.

Мы фиксируем эффективную нумерацию всех формул сигнатуры $\langle 0, ', +, \cdot, \Omega\rangle$, которая описана в обзоре [10] на с. 43. Эта нумерация согласуется с нумерацией книги [12] (см. § 52) во всем, кроме номеров $0, ', +, \cdot$. Мы считаем для определенности, что $0, ', +, \cdot$ есть соответственно a_1, f_1, f_2, f_3 и, значит, имеют номера 17, 21 и т. д. Материал, изложенный на страницах 226—230 книги [12], совершенно не зависит от остального текста [12] и предполагается известным.

Запись

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s),$$

где Φ — формула второго порядка арифметики, означает, что символы переменных (предметных, функциональных, предикатных), имеющие свободные вхождения в Φ, содержатся среди $x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_l, R_1, \ldots, R_s$. Для этой же формулы выражение

$$«\Phi(a_1, \ldots, a_k; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s) \text{ истинно}»,$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — натуральные числа, $g_1, \ldots, g_l$ — операции на натуральных числах соответствующих местностей, а $A_1, \ldots, A_s$ — отношения на натуральных числах соответствующих местностей, означает, что формула Φ истинна в арифметике при приписывании свободно входящим в Φ символам из последовательности $x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_l, R_1, \ldots, R_s$ значений $a_1, \ldots, a_k, g_1, \ldots, g_l, A_1, \ldots, A_s$ соответственно.

Через N^k обозначаем декартово произведение N на себя k раз, через F_k — множество всех k—местных операций на N, через N_k — множество всех подмножеств N^k. Говорим, что формула второго порядка арифметики

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k; f_1^{(n_1)}, \ldots, f_l^{(n_l)}; R_1^{(m_1)}, \ldots, R_s^{(m_s)})$$

определяет отношение

$$A \subseteq N^k \times F_{n_1} \times \ldots \times F_{n_l} \times N_{m_1} \times \ldots \times N_{m_s}$$

или что A определяется формулой Φ, если для любого набора

$$\langle a_1, \ldots, a_k; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s\rangle$$

тогда и только тогда

$$\Phi(a_1, \ldots, a_k; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$$

истинно, когда

$$\langle a_1, \ldots, a_k; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s\rangle \in A.$$

Отношение A называется аналитическим, если оно может быть определено формулой второго порядка арифметики, и арифметическим, если оно может быть определено формулой арифметики.

Для того чтобы определить иерархию арифметических и аналитических отношений, нам понадобятся некоторые понятия и обозначения. Для функции f из N^k в N (возможно, частичной) через $\varkappa(f)$ обозначим множество

$$\{\varkappa(x_1, \ldots, x_k, y) \mid f(x_1, \ldots, x_k) = y\}.$$

Для $A \subseteq N^k$ символом $\varkappa(A)$ обозначим множество

$$\{\varkappa(x_1, \ldots, x_k) \mid \langle x_1, \ldots, x_k\rangle \in A\}.$$

Для

$$\varkappa(g_1) \oplus \ldots \oplus \varkappa(g_l) \oplus \varkappa(A_1) \oplus \ldots \oplus \varkappa(A_s)$$

как сокращение используем

$$g_1 \oplus \ldots \oplus g_l \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_s.$$

Функция φ, отображающая подмножество множества

$$N^k \times F_{n_1} \times \ldots \times F_{n_l} \times N_{m_1} \times \ldots \times N_{m_s}$$

в N, называется частично рекурсивной, если существует такое число z, что

$$\varphi(a_1, \ldots, a_k; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s) = b$$

тогда и только тогда, когда

$$\varphi_z^{g_1 \oplus \ldots \oplus g_l \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_s}(\varkappa(a_1, \ldots, a_k)) = b.$$

Частично рекурсивная функция, отображающая все $N^k \times F_{n_1} \times \ldots \times N_{m_s}$ в N, называется общерекурсивной. Другими словами, φ частично рекурсивна, если существует алгоритм вычисления φ, который для входа $a_1, \ldots, a_k$, $g_1, \ldots, g_l$, $A_1, \ldots, A_s$ производит строго детерминированные вычисления с натуральными числами, время от времени используя в качестве оракулов множества $\varkappa(g_1), \ldots, \varkappa(g_l)$, $\varkappa(A_1), \ldots, \varkappa(A_s)$. Отношение

$$A \subseteq N^k \times F_{n_1} \times \ldots \times F_{n_l} \times N_{m_1} \times \ldots \times N_{m_s}$$

называется рекурсивным, если его характеристическая функция общерекурсивна. Известно, что любое рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел является арифметическим ([12]). Отсюда легко следует, что арифметическим является любое рекурсивное отношение A на

$$N^k \times F_{n_1} \times \ldots \times N_{m_s}.$$

При этом формула, определяющая A, эффективно находится по коду алгоритма, вычисляющего характеристическую функцию отношения A.

Пусть

$$\forall_0 = \exists_0 = \{\varnothing\}, \quad \exists_{n+1} = \exists_n \cup \{\exists^m \alpha \mid \alpha \in \forall_n, \quad m \in N\},$$
$$\forall_{n+1} = \forall_n \cup \{\forall^m \alpha \mid \alpha \in \exists_n, \quad m \in N\},$$

где $\exists^0$ и $\forall^0$ — пустое слово, а $\exists^{m+1}$ есть $\exists\exists^m$, $\forall^{m+1}$ есть $\forall\forall^m$. Последовательности вида $(Q_1\alpha_1)\ \ldots\ (Q_s\alpha_s)$, где каждое $Q_i\alpha_i$ является выражением одного из видов $\exists x_j$, $\forall x_j$, $\exists f_j$, $\forall f_j$, $\exists R_j$, $\forall R_j$, а также пустую последовательность будем называть префиксами. Префикс называется $\Sigma_n(\Pi_n)$-префиксом, если в нем содержатся лишь кванторы по предметным переменным и после вычеркивания переменных и скобок он принадлежит $\exists_n(\forall_n)$. Σ_n^1 (Π_n^1)-префиксом называется префикс, в котором после вычеркивания всех кванторов по предметным переменным и всех символов переменных и скобок полученная последовательность кванторов принадлежит $\exists_n(\forall_n)$. Из этого определения следует, что Σ_n (Π_n)-префиксы являются как Σ_0^1—префиксами, так и Π_0^1-префиксами. Формула арифметики Φ называется Σ_n (Π_n)-формулой (условно Σ_n (Π_n)-формулой), если она имеет вид $(Q_1\alpha_1)\ \ldots\ (Q_s\alpha_s)\Psi$, где $(Q_1\alpha_1)\ \ldots\ (Q_s\alpha_s)$ есть Σ_n (Π_n)-префикс, а Ψ — бескванторная (определяет рекурсивное отношение). Формула второго порядка арифметики Φ называется Σ_n^1 (Π_n^1)-формулой, если она имеет вид $(Q_1\alpha_1)\ \ldots(Q_s\alpha_s)\Psi$, где $(Q_1\alpha_1)\ \ldots\ (Q_s\alpha_s)$ есть Σ_n^1 (Π_n^1)-префикс, а Ψ — бескванторная формула.

Арифметическое отношение называется Σ_n (Π_n)-отношением, если оно может быть определено условно Σ_n (Π_n)-формулой. Аналитическое отношение называется Σ_n^1 (Π_n^1)-отношением, если оно может быть определено Σ_n^1 (Π_n^1)-формулой. Аналитическое отношение называется гиперарифметическим, если оно является одновременно как Σ_1^1-отношением, так и Π_1^1-отношением. Пишем $A \in \Sigma_n$, если A является Σ_n-отношением. Аналогично понимаются записи $A \in \Pi_n$, $A \in \Sigma_n^1$ и $A \in \Pi_n^1$.

Множество $A \subseteq N$ называется арифметическим относительно $B \subseteq N$, если существует такая формула $\Phi(x_1;\ R^{(1)})$ арифметики, что $A = \{a \in N \mid \Phi(a; B)$ истинно$\}$. Легко понять, что если A — арифметическое относительно B, а B — арифметическое, то и A — арифметическое. Множество $A \subseteq N$ неявно определимо в арифметике, если отношение $\{A\}$ как подмножество N, является арифметическим, другими словами, если существует такая формула арифметики $\Phi(R^{(1)})$, что $\Phi(B)$ истинно тогда и только тогда, когда $B = A$. Если A неявно определимо в арифметике, то A — гиперарифметическое, так как

$$n \in A \Leftrightarrow (\exists R)(\Phi(R) \wedge R(n)) \Leftrightarrow (\forall R)(\Phi(R) \rightarrow R(n)).$$

Лемма 1 (Е. Пост; см. [17]). *Множество $A \subseteq N$ является одновременно как Σ_{n+1}-множеством, так и Π_{n+1}-множеством тогда и только тогда, когда $d(A) \leqslant 0^{(n)}$.*

Отсюда $A \subseteq N$ — арифметическое тогда и только тогда, когда $d(A) \leqslant 0^{(n)}$ для некоторого натурального n.

Теперь укажем некоторые преобразования, которые можно производить с формулами второго порядка арифметики. Прежде всего отметим, что любая такая формула эффективно может быть преобразована в эквивалентную с кванторами только по одноместным предикатным символам и предметным переменным. При этом Σ_n^1 (Π_n^1)-формула преобразуется в Σ_n^1 (Π_n^1)-формулу. Например, формула $(\exists f)\Phi(f^{(2)})$ переделывается в

$$(\exists R)[(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y)R(\varkappa(x_1,\ x_2,\ y)) \wedge$$
$$\wedge\ (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)((R(\varkappa(x_1,\ x_2,\ y_1)) \wedge R(\varkappa(x_1,\ x_2,\ y_2))) \rightarrow$$
$$\rightarrow y_1 = y_2) \wedge \Phi^*],$$

где Φ^* получается из $\Phi(f)$ заменой каждого вхождения подформулы вида

$$f(t_1, t_2) = t_3 \text{ на } R\ (\varkappa(t_1, t_2, t_3)).$$

Далее в формуле вида $(Q_1\alpha_1) \ldots (Q_s\alpha_s)\Psi$, где Ψ определяет рекурсивное отношение, мы можем в префиксе пару соседних кванторов $(\forall x)\ (\forall y)$ заменить на $(\forall x)$, $(\exists x)(\exists y)$ — на $(\exists x)$, $(\forall R)(\forall P)$ — на $(\forall R)$, $(\exists R)(\exists P)$ — на $(\exists R)$, $(\exists x)(\forall R)$ — на $(\forall R)(\exists x)$, $(\forall x)(\exists R)$ — на $(\exists R)(\forall x)$, $(\forall x)(\exists y)$ — на $(\exists f^{(1)})(\forall x)$, $(\forall x)(\exists y)$ — на $(\forall f^{(1)})(\exists x)$, меняя при этом формулу Ψ так, что она по-прежнему будет определять рекурсивное отношение. Пользуясь этими правилами и учитывая то, как мы кванторы по символам операций заменяем кванторами по одноместным предикатным символам, получаем, что любое Σ_n (Π_n)-отношение может быть определено формулой вида $(Q_1\alpha_1) \ldots (Q_n\alpha_n)\Psi$, где Ψ определяет рекурсивное отношение, а префикс состоит из последовательности чередующихся кванторов по предметным переменным, первый из которых есть $\exists(\forall)$, а любое Σ_n^1 (Π_n^1)-отношение может быть определено формулой вида $(Q_1\alpha_1)\ldots(Q_{n+2}\alpha_{n+2})\Psi$, где Ψ определяет рекурсивное отношение, а префикс состоит из последовательности чередующихся кванторов, первые n из которых — кванторы по одноместным предикатным символам, последние два — по предметным переменным, а Q_1 есть $\exists(\forall)$.

Далее ограничимся рассмотрением отношений на $N^k \times N_1^l$. Через $T_{k,\,l}(x_1, \ldots, x_k, z, w; R_1^{(1)}, \ldots, R_l^{(1)})$ обозначим формулу арифметики, определяющую следующее рекурсивное отношение $A_{k,\,l}$ на

$$N^{k+2} \times N_1^l\colon \langle a_1, \ldots, a_k, z, i; B_1, \ldots, B_l\rangle \in A_{k,\,l} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow «\varphi_z^{B_1\oplus\cdots\oplus B_l}(\varkappa(a_1, \ldots, a_k)) \text{ вычисляется на шаге } i».$$

Очевидно, что любое $\Sigma_1(\Pi_1)$-отношение на $N^k \times N_1^l$ может быть при некотором z_0 определено формулой

$$(\exists w)T_{k,\,l}(x_1, \ldots, x_k, z_0, w; R_1, \ldots, R_l)((\forall w) \neg T_{k,\,l}(x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_k, z_0, w; R_1, \ldots, R_l)).$$

Отсюда легко следует, что любое $\Sigma_n(\Pi_n)$-отношение может быть определено при некотором z_0 формулой

$$(\exists y_1)(\forall y_2) \ldots (\forall y_{n-1})(\exists w)\neg$$
$$\neg T_{k+n-1,\,l}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_0, w; R_1, \ldots, R_l),$$
$$((\forall y_1)(\exists y_2) \ldots (\exists y_{n-1})(\forall w) \neg$$
$$\neg T_{k+n-1,\,l}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_0, w; R_1, \ldots, R_l)),$$

если n нечетно, и формулой

$$(\exists y_1)(\forall y_2) \ldots (\exists y_{n-1})(\forall w) \neg$$
$$\neg T_{k+n-1,\,l}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_0, w; R_1, \ldots, R_l),$$
$$((\forall y_1)(\exists y_2) \ldots (\forall y_{n-1})(\exists w)$$
$$T_{k+n-1,\,l}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_0, w; R_1, \ldots, R_l)),$$

если n четно, а любое Σ_n^1 (Π_n^1)-отношение на $N^k \times N_1^l$ может быть определено при некотором z_0 формулой

$$(\exists R_{l+1})(\forall R_{l+2}) \ldots (\forall R_{l+n})(\exists y_1)(\forall w) \neg$$
$$\neg T_{k+1,\,l+n}(x_1, \ldots, x_k, y_1, z_0, w; R_1, \ldots, R_{n+l}),$$
$$((\forall R_{l+1})(\exists R_{l+2}) \ldots (\exists R_{l+n})(\forall y_1)(\exists w)$$
$$T_{k+1,\,l+n}(x_1, \ldots, x_k, y_1, z_0, w; R_1, \ldots, R_{n+l}))$$

при четном n и формулой

$$(\exists R_{l+1})(\forall R_{l+2}) \ldots (\exists R_{l+n})(\forall y_1)(\exists w)$$
$$T_{k+1,\ l+n}(x_1, \ldots, x_k, y_1, z_0, w; R_1, \ldots, R_{n+l}),$$
$$((\forall R_{l+1})(\exists R_{l+2}) \ldots (\forall R_{l+n})(\exists y_1)(\forall w) \neg$$
$$\neg T_{k+1,\ l+n}(x_1, \ldots, x_k, y_1, z_0, w; R_1, \ldots, R_{n+l}))$$

при нечетном n. Число z_0 называем Σ_n (Π_n)-индексом или Σ_n^1 (Π_n^1)-индексом отношения, определяемого соответствующей формулой.

Говорят, что формула Φ имеет пренексный вид, если она является выражением вида $(Q_1\alpha_1)\ldots(Q_s\alpha_s)\Psi$, где Ψ — бескванторная формула. Заметим, что по формуле (формуле второго порядка) арифметики пренексного вида можно найти одноименный с префиксом индекс отношения, определяемого этой формулой. Это делается эффективно.

Теперь легко показать, что если у нас имеется множество

$$\{\Phi_i(x_1, \ldots, x_k; f_1^{(n_1)}, \ldots, f_l^{(n_l)}; R_1^{(m_1)}, \ldots, R_s^{(m_s)}) \mid i \in I\}$$

Σ_n-формул арифметики, а множество номеров его формул является арифметическим, то отношение, определяемое бесконечной дизъюнкцией $\bigvee\limits_{i\in I} \Phi_i$, и отношение, определяемое бесконечной конъюнкцией $\bigwedge\limits_{i\in I} \Phi_i$, являются арифметическими.

В самом деле, каждую Φ_i мы можем заменить формулой

$$\Phi_i'(x_1, \ldots, x_k; R_1^{(1)}, \ldots, R_{l+s}^{(1)}),$$

которая утверждает, что $R_1, \ldots, R_{l+s}$ определяют для некоторых $f_1^{(n_1)}, \ldots$ $\ldots, R_s^{(m_s)}$ множества $\varkappa(f_1), \ldots, \varkappa(R_s)$ и

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_k; f_1^{(n_1)}, \ldots, f_l^{(n_l)}; R_1^{(m_1)}, \ldots, R_s^{(m_s)})$$

истинно. По каждой Φ_i' эффективно находится Σ_m-индекс отношения, определяемого формулой Φ_i', где m — такое число, что все Φ_i' являются Σ_m-формулами. Значит, можно написать формулу $\Phi(z)$, определяющую множество этих Σ_m-индексов отношений, определяемых формулами $\Phi_i'(i \in I)$. Теперь $\bigvee\limits_{i\in I} \Phi_i'$ эквивалентна формуле

$$(\exists z)(\Phi(z)) \wedge (\exists y_1) \ldots$$
$$\ldots T_{k+m-1,\ l+s}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{m-1}, z, w; R_1, \ldots, R_{l+s}).$$

Из этой формулы легко получить формулу, эквивалентную $\bigvee\limits_{i\in I} \Phi_i$.

В дальнейшем понадобится критерий, позволяющий устанавливать, что некоторое множество $A \subseteq N$ является Σ_1^1-множеством. Допустим, что имеется эффективная процедура, ставящая в соответствие каждому натуральному числу n формулу арифметики $\Phi_n(f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$ с $f_1, \ldots, R_s$, не зависящими от n, так, что $n \in A$ тогда и только тогда, когда

$$(\exists f_1) \ldots (\exists R_s)\Phi_n(f_1, \ldots, R_s)$$

истинна. В этом случае $A \in \Sigma_1^1$.

В самом деле, пользуясь описанными выше правилами сжатия кванторов, формулу $(\exists f_1) \ldots (\exists R_s)\Phi_n$ можно эффективно переделать в эквивалентную $(\exists R)\Phi_n'(R^{(1)})$, где Φ_n' являются пренексными Σ_m-формулами для фиксированного m. Теперь то, что $n \in A$ эквивалентно истинности формулы

$$(\exists R) \bigwedge_{j=0}^{\infty} (n = j \to \Phi_j'(R)).$$

Каждому арифметическому множеству $A \subseteq N$ следующим образом сопоставим однозначно натуральное число, которое будем называть номером A. Находим наименьшее r такое, что A есть Π_r-множество, и наименьшее натуральное z такое, что z есть Π_r-индекс A. Номером A называем номер формулы

$$(\forall x_2) \ldots T_{r,0}(x_1, x_2, \ldots, x_r, z, x_{r+1}).$$

Покажем, что для всякого r множество номеров Π_r-множество является арифметическим и может быть определено некоторой формулой, выписываемой по r эффективно. В самом деле, эта формула утверждает, что

$$\bigvee_{s \leqslant r} (\exists z)\{[v \text{ — номер } (\forall x_2) \ldots T_{s,0}(x_1, x_2, \ldots, x_s, 0^z, x_{s+1})] \wedge$$
$$\wedge (\forall z_1)[z_1 < z \to \neg (\forall x)((\forall y_1) \ldots T_{s,0}(x, y_1, \ldots, y_{s-1}, z, w) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall y_1) \ldots T_{s,0}(x, y_1, \ldots, y_{s-1}, z_1, w))] \wedge$$
$$\bigwedge_{i<s} (\forall z_1) \neg (\forall x)((\forall y_1) \ldots T_{s,0}(x, y_1, \ldots, y_{s-1}, z, w) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall y_1) \ldots T_{i,0}(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, z_1, w))\},$$

где 0^z есть 0 при $z = 0$ и 0^{z+1} есть $(0^z)'$.

Формула $\Psi_r(u, v)$, равная конъюнкции предыдущей формулы и $\bigwedge_{s \leqslant r} (\forall z)$ (v — номер

$$(\forall x_2) \ldots T_{s,0}(x_1, \ldots, x_s, 0^z, x_{s+1}) \to$$
$$\to (\forall y_1) \ldots T_{s,0}(u, y_1, \ldots, y_{s-1}, z, w)),$$

истинна для $\langle n_1, n_2 \rangle$ тогда и только тогда, когда n_2 — номер Π_r-множества и n_1 принадлежит Π_r-множеству номера n_2.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2. *Пусть Ω_1— рекурсивная сигнатура. Существует такая формула $\Phi_1(x_1; R^{(1)})$ арифметики, что $\Phi(a; B)$ истинно тогда и только тогда, когда существуют такие $b_1, \ldots, b_s \in B$, что $a, b_1, \ldots, b_s$ есть номера формул без свободных переменных логики предикатов первого порядка сигнатуры Ω_1 и формула номера a выводима из формул номеров $b_1, \ldots, b_s$ в исчислении предикатов.*

Доказательство. По s эффективно строится формула $\Psi_s(x_1, \ldots, x_{s+1})$ арифметики такая, что $\Psi_s(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1})$ истинно тогда и только тогда, когда $a_1, \ldots, a_{s+1}$ — номера формул без свободных переменных логики предикатов первого порядка сигнатуры Ω_1 и формула номера a_{s+1} выводима из формул номеров $a_1, \ldots, a_s$ в исчислении предикатов. Тогда в качестве $\Phi(x_1; R)$ можно взять формулу арифметики, эквивалентную

$$\bigvee_{s=1}^{\infty} (\exists x_2) \ldots (\exists x_{s+1})(\Psi_s(x_2, \ldots, x_{s+1}, x_1) \wedge \bigwedge_{i=2}^{s+1} R(x_i)).$$

Следствие. *Пусть T — такое множество формул без свободных переменных логики предикатов первого порядка сигнатуры Ω_1, что множество номеров формул из T является арифметическим. Если сигнатура Ω_1 рекурсивна, то множество номеров формул, выводимых в исчислении предикатов из T и являющихся формулами без свободных переменных сигнатуры Ω_1, тоже является арифметическим.*

Пусть теперь

$$\Omega_1 = \langle 0, 1, \ldots; f_1^{(n_1)}, \ldots, f_l^{(n_l)}; R_1^{(m_1)}, \ldots, R_s^{(m_s)} \rangle.$$

Пусть множество T — как в условии предыдущего следствия, а $\Delta(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ — совокупность номеров всех формул $\Phi(f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$ без свободных предметных переменных сигнатуры Ω_1, каждая из которых либо атомная, либо отрицание атомной, и для которых

$\Phi(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ истинно. Легко видеть, что существует такая формула арифметики $\Psi(x; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$, что для любых $a \in N$; $g_1 \in F_{n_1}, \ldots, g_l \in F_{n_l}$ и $A_1 \in N_{m_1}, \ldots, A_s \in N_{m_s}$ тогда и только тогда $\Psi(a; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ истинно, когда $a \in \Delta(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$. Если в $\Phi(x_1, R)$ из леммы 2 вместо каждого вхождения $R(y)$ подставлять $\Phi_1(y) \vee \Psi(y; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$, где $\Phi_1(x)$ определяет множество номеров формул из T, то получим формулу $\Psi_1(x_1; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$. Формула

$$\neg (\exists y)(\Psi_1(y; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s) \wedge \Psi_1(2^9 \cdot 3^y; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s))$$

тогда и только тогда истинна для

$$\langle g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s \rangle \in F_{n_1} \times \ldots \times N_{m_s},$$

когда

$$T \cup \{\Phi \mid \nu(\Phi) \in \Delta(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)\}$$

непротиворечиво. Аналогично, существует такая формула арифметики $\Psi_2(x; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$, что для любых $a \in N$, $g_1 \in F_{n_1}, \ldots, g_l \in F_{n_l}$ и $A_1 \in N_{m_1}, \ldots, A_s \in N_{m_s}$ тогда и только тогда $\Psi_2(a; g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ истинно, когда a является номером такой Π_1-формулы $\Phi(f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$ сигнатуры Ω_1, что $\Phi(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ истинно. Значит, формула

$$(\forall x)(\Psi_2(x; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s) \rightarrow \Psi_1(x; f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s))$$

тогда и только тогда истинна для

$$\langle g_1, \ldots, g_l; A_l, \ldots, A_s \rangle \in F_{n_1} \times \ldots \times N_{m_s},$$

когда из

$$T \cup \{\Phi \mid \nu(\Phi) \in \Delta(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)\}$$

выводима любая Π_1-формула $\Phi(f_1, \ldots, f_l; R_1, \ldots, R_s)$ сигнатуры Ω_1, для которой $\Phi(g_1, \ldots, g_l; A_1, \ldots, A_s)$ истинно. Здесь $\nu(\Phi)$ обозначает номер формулы Φ.

В дальнейшем нам понадобится также

Лемма 3 (А. Макинтайр [47]). *Существует такая совокупность $\{\tau_i \mid i \in N\}$ арифметических тьюринговых степеней, что для всяких натуральных n и попарно различных $i, j_1, \ldots, j_n$ $\tau_i \not\leqslant \tau'_{j_1} \cup \ldots \cup \tau'_{j_n}$.*

Доказательство. Рассмотрим формулу арифметики

$$\Phi_n(x, z; R_1^{(1)}, \ldots, R_n^{(1)}),$$

которая истинна для $x, z, A_1, \ldots, A_n$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_z^{A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n}(x) = 1.$$

Очевидно, что Φ_n может быть записана при некотором фиксированном r_1, не зависящем от n, как Σ_{r_1}-формула. Пусть $r = 4r_1 + 3$.

Далее мы используем форсинг Коэна — Фефермана, описанный в [17] на с. 578—579. Рассматривается счетная совокупность $\{R_i \mid i \in N\}$ одноместных предикатных символов. Любое конечное множество p, элементами которого являются формулы видов $R_i(n)$ и $\neg R_i(n)$, но в которое обе эти формулы одновременно не входят ни для какого n, мы называем условием. Для замкнутой формулы Φ сигнатуры $\Omega_1 = \langle 0, ', +, \cdot, R_0, R_1, \ldots \rangle$, не содержащей логических знаков $\forall, \wedge, \rightarrow$ и элементарных подформул вида $R(t)$, где t — терм, отличный от предметной переменной и от $0, 1, 2, \ldots$, и для условия p определяем понятие «$p \Vdash \Phi$» (говорим: p форсирует Φ) индукцией по числу кванторов и связок в Φ. При этом замкнутой мы называем формулу арифметики без свободных предметных переменных. Здесь, как обычно, $1 = 0'$, $2 = 0''$ и т. д.

Если Φ есть $R_i(n)$, то $p \| - \Phi \Leftrightarrow \Phi \in p$; если Φ есть $t_1 = t_2$, $t_1 + t_2 = t_3$ или $t_1 \cdot t_2 = t_3$, то $p \| - \Phi \Leftrightarrow \Phi$ истинна; если Φ есть $(\exists x)\Phi_1(x)$, то $p \| - \Phi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ существует n, что $p \| - \Phi_1(n)$; если Φ есть $\Phi_1 \vee \Phi_2$, то $p \| - \Phi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (p \| - \Phi_1$ или $p \| - \Phi_2)$; если Φ есть $\neg \Phi_1$, то $p \| - \Phi$ тогда и только тогда, когда p_1 не форсирует Φ_1 для всякого такого условия p_1, что $p_1 \supseteq p$.

Легко видеть, что а) если Φ не содержит символов $R_0, R_1, \ldots$, то $p \| - \Phi$ тогда и только тогда, когда Φ истинна в арифметике, б) если Φ — бескванторная формула, то $p \| - \neg \Phi$ тогда и только тогда, когда $\neg \Phi$ есть тавтологическое следствие p и равенств арифметики.

Далее в этом доказательстве допустимой формулой называем такую, для которой мы определяли понятие форсируемости. Будем говорить, что ранг допустимой формулы не более r, если сумма числа максимальных подслов ее вида $(\exists y_1) \ldots (\exists y_m)$ с числом вхождений в нее символов отрицания, не начинающих бескванторные подформулы, не больше r. Обогащение арифметики до системы сигнатуры Ω_1 назовем r-генерическим, если для любой допустимой формулы Φ ранга не более r найдется такое условие p, что $p \| - \Phi \vee \neg \Phi$ и все формулы из p истинны в рассматриваемом обогащении. Используя определение форсируемости, легко показать индукцией по числу кванторов и связок в Φ, что если M — r-генерическая система и Φ — допустимая формула ранга не более r, то в M истинна Φ тогда и только тогда, когда для некоторого условия p, истинного в M, $p \| - \Phi$. Пусть теперь R_i — произвольный символ из $\{R_j \mid j \in N\}$ и n — произвольное натуральное число. Если M — обогащение арифметики до системы сигнатуры Ω_1, то через $M(i, n)$ обозначим систему, полученную из M переопределением значения предиката R_i на элементе n на противоположное.

Докажем, что если M — r-генерическая система, то $M(i, n)$ — тоже r-генерическая. Для этого надо сперва проверить, что

$$p \| - \Phi \Leftrightarrow p(i, n) \| - \Phi(i, n),$$

где $p(i, n)$ получается из p заменой $R_i(n)$ на $\neg R_i(n)$, если $R_i(n) \in p$, и $\neg R_i(n)$ на $R_i(n)$, если $\neg R_i(n) \in p$, а $\Phi(i, n)$ получается из Φ заменой всех атомных подформул вида $R_i(t)$ на

$$\neg (t = n \vee \neg R_i(t)) \vee \neg (t \neq n \vee R_i(t)).$$

Проверка легко осуществляется индукцией по числу кванторов и связок в Φ. Пусть теперь M является r-генерической и Φ — допустимая формула ранга не более r. Тогда $\Phi(i, n)$ — формула ранга не более r, и, значит, найдется условие p, истинное в M и форсирующее $\Phi(i, n) \vee \neg \Phi(i, n)$. Если теперь $p(i, n)$ не форсирует Φ, то $(p(i, n))(i, n)$ не форсирует $\Phi(i, n)$ и, значит, p не форсирует $\Phi(i, n)$. Аналогично, если $p(i, n)$ не форсирует $\neg\Phi$, то p не форсирует $(\neg\Phi)(i, n)$. Следовательно, $p(i, n) \| - \Phi \vee \neg\Phi$ и $M(i, n)$ является r-генерической.

Остается построить r-генерическую систему, в которой R_i $(i \in N)$ определяют арифметические множества. В самом деле, допустим, что для некоторых $i, j_1, \ldots, j_n$ из N имеем

$$A_i \leqslant {}_T A'_{j_1} \oplus \ldots \oplus A'_{j_n},$$

где A_j является значением R_j в построенной r-генерической M. Тогда для некоторого числа z в M истинно

$$(1) \qquad (\forall x)(R_i(x) \leftrightarrow \Phi_n(x, z; R_{j_1}, \ldots, R_{j_n})).$$

Эта формула имеет ранг не более r, значит, найдется условие p, истинное в M и форсирующее эту формулу [1]). Выберем такое m, что $R_i(m)$ и $\neg R_i(m)$ не

[1]) Более точно надо говорить не о формуле (1), а об эквивалентной ей допустимой формуле.

встречаются в p, и рассмотрим $M(i, m)$. Она тоже является r-генерической, и в ней p истинно. Значит, в ней истинна и формула (1), что, однако, противоречит выбору $M(i, m)$.

Для построения искомой M надо заметить, что множество пар $\langle p, \Phi\rangle$, где p — условие, Φ — формула ранга не более r и $p \Vdash \Phi$,— арифметическое (при некоторой эффективной нумерации всех пар $\langle p, \Phi\rangle$). Нумеруя допустимые формулы ранга не более r в последовательность $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$, строим возрастающую последовательность условий $p_0, p_1, \ldots$, которая является арифметической и такой, что $p_{n+1} \Vdash \Psi_n \vee \neg \Psi_n$ для всех натуральных n. Тогда $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ определяет искомое обогащение арифметики.

Более подробно, индукцией по i сначала построим формулы $\Theta_i(x_1, x_2)$, которые утверждают, что x_2 — номер допустимой формулы ранга не более i, а x_1 — номер условия, форсирующего формулу номера x_2. При этом номером условия $p = p_u$ называем число $u = 2^{l_1} + \ldots + 2^{l_s}$, если p состоит из формул номеров $l_1, \ldots, l_s$. Если $\Theta_i(x_1, x_2)$ уже построена, то в качестве $\Theta_{i+1}(x_1, x_2)$ выбираем формулу арифметики, которая утверждает, что либо x_2 является номером дизъюнкции формул, номер y одной из которых удовлетворяет $\Theta_i(x_1, y)$, либо одна из этих формул имеет вид

$$(\exists y_1) \ldots (\exists y_m)\Psi(y_1, \ldots, y_m)$$

и для некоторых натуральных $n_1, \ldots, n_m$ номер y формулы $\Psi(n_1, \ldots, n_m)$ удовлетворяет $\Theta_i(x_1, y)$, либо одна из этих формул имеет вид $\neg\Psi$, а номер y формулы Ψ удовлетворяет формуле

$$(\forall x)(p_x \supseteq p_{x_1} \to \neg \Theta_i(x, y)),$$

а также формуле, которая утверждает, что y — номер допустимой формулы ранга не более i и что x_2 — номер допустимой формулы ранга $\leqslant i + 1$. Если теперь за p_0 взять пустое условие, а в качестве p_{n+1} взять p_n, если $p_n \Vdash \neg\Psi_n$, и взять условие с наименьшим номером, расширяющее p_n и форсирующее Ψ_n, если p_n не форсирует $\neg \Psi_n$, то $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ определяет искомое обогащение арифметики.

Приведем в заключение некоторые сведения о гиперарифметических множествах.

Определим некоторую систему O обозначений для ординалов. Она представляет собой а) некоторое подмножество множества натуральных чисел, которое мы и обозначаем через O; б) отображение этого множества в класс ординалов, которое мы обозначаем через $|\ \ |$, а через $|x|$ обозначаем образ числа x и называем обозначением ординала $|x|$ число x; в) некоторое частичное упорядочение на O, которое мы обозначаем через $\leqslant_O$. Определение дается по трансфинитной индукции. Пусть $O_0 = \{1\}$, $|1| = 0$, $1 \leqslant_O 1$. Пусть все ординалы, меньшие ординала γ, уже получили обозначения. Если $\gamma = \beta + 1$, то для всех x таких, что $|x| = \beta$, полагаем $|2^x| = \gamma$, $2^x \leqslant_O 2^x$, $z \leqslant_O 2^x$ для всех $z \in O_\beta$, для которых $z \leqslant_O x$. Таким образом,

$$O_\gamma = O_\beta \cup \{2^x \mid x \in O_\beta,\ |x| = \beta\}.$$

Если же γ — предельный ординал, то γ получает обозначение только в случае, когда существует такая общерекурсивная функция φ, что последовательность $\varphi(0), \varphi(1), \ldots$ лежит в $\bigcup\limits_{\beta<\gamma} O_\beta$ и является неограниченной сверху в $\bigcup\limits_{\beta<\gamma} O_\beta$ строго возрастающей последовательностью относительно $\leqslant_O$. В этом случае обозначением γ является всякое число $3\cdot 5^y$, для которого φ_y удовлетворяет названному выше свойству. Полагаем также

$$3\cdot 5^y \leqslant_O 3\cdot 5^y \quad \text{и} \quad z \leqslant_O 3\cdot 5^y$$

для всякого z, для которого $z \leqslant {}_O\varphi_y(n)$ при некотором n. O_γ опять есть объединение $\bigcup_{\beta<\gamma} O_\beta$ и всех обозначений ординала γ. Пусть O — объединение O_γ по всем ординалам, получившим обозначения.

Для каждого $x \in O$ параллельно определению O определяем подмножество $H(x)$ множества натуральных чисел. Полагаем

$$H(1) = \varnothing,\ H(2^x) = (H(x))' \text{ при } x \in O$$

и

$$H(3\cdot 5^y) = \{\varkappa(u, v) \mid v <_O 3\cdot 5^y,\ u \in H(v)\} \text{ при } 3\cdot 5^y \in O.$$

Лемма 4 (С. Клини). а) *Если $x \in O$, то $H(x)$ неявно определимо в арифметике.* б) *Если B — гиперарифметическое множество, то существует такой $x \in O$, что B 1-сводится к $H(x)$ и, значит, $B \leqslant_T H(x)$.*

Доказательство леммы 4 приведено в [17], с. 564 (см. доказательство теорем L и LI).

Следствие. *Для всякого гиперарифметического множества B существует такое неявно определимое в арифметике A, что $d(B) < d(A)$.*

Доказательство. Для B найдем такой $x \in O$, что $B \leqslant_T H(x)$. Тогда $H(2^x)$ годится в качестве A.

§ 1. Некоторые неэлементарные логики

Материал § 1 если и является новым, то только в деталях.

Мы фиксируем некоторую сигнатуру, т. е. набор символов предикатов и операций вместе с указанием местности каждого символа, и рассматриваем языки этой сигнатуры, т. е. такие языки, внелогические символы которых — это символы рассматриваемой сигнатуры. Рассматриваемая сигнатура в этом параграфе предполагается конечной.

При написании формул мы используем символы из последовательности

(1) $$x_1,\ x_2,\ \ldots$$

как символы предметных переменных, символы из последовательности

(2) $$Q_1,\ Q_2,\ \ldots$$

как одноместные символы предикатных переменных и символы из последовательности

(3) $$H_1,\ H_2,\ \ldots$$

как двухместные символы предикатных переменных. Конечно, мы предполагаем, что символы из этих последовательностей не используются как сигнатурные символы ни для какой сигнатуры.

Ради краткости формулы логики предикатов первого порядка называем просто формулами.

Затем мы рассматриваем формулы логики предикатов второго порядка, в которых все символы переменных предикатов являются двухместными и взяты из последовательности (3), а символов переменных операций нет. Если Φ — такая формула, свободные переменные которой содержатся среди $H_{i_1}, \ldots, H_{i_s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, и A — алгебраическая система рассматриваемой сигнатуры, то мы следующим образом определяем, в каких случаях Φ истинна в A, когда переменным $H_{i_1}, \ldots, H_{i_s}$ в качестве значений приписаны конечные множества $B_1, \ldots, B_s$ пар элементов A, а переменным $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ в качестве значений приписаны элементы $a_1, \ldots, a_r$ системы A. Если Φ не содержит кванторов по предикатам, то истинность Φ в A определяется обычным образом. Истинность же $(\forall H_i)\Psi$ означает, что Ψ истинна при заданных значениях $H_{i_1}, \ldots, H_{i_s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ и при любом конечном множестве пар элементов A как значении H_i. Истинность

$$\neg\Phi_1,\ \Phi_1 \bigvee \Phi_2,\ \Phi_1 \bigwedge \Phi_2,\ (\forall x_i)\Phi_1,\ (\exists x_i)\Phi_1$$

определяется через истинность Φ_1 и Φ_2 обычным образом, а истинность $(\exists H_i)\Psi$ равносильна истинности $\neg(\forall H_i)\neg\Psi$. Другими словами, символы из последовательности (3) интерпретируются как конечные двухместные предикаты на основном множестве системы A. Формулы, о которых идет речь в этом абзаце, мы коротко называем формулами типа I.

Напомним, что у нас зафиксирована нумерация формул нашей сигнатуры, а также арифметических множеств натуральных чисел. Мы будем говорить, что множество формул является арифметическим, если таковым является множество номеров этих формул. Дадим определение формулы типа II. Одновременно определяем, продолжая нашу нумерацию, номер формулы типа II, а также для формулы типа II Φ и натурального числа r понятие «Φ имеет сложность не более r». Если Φ — формула, то Φ есть формула типа II. Сложность Φ не более r, если Φ есть одновременно Π_r-формула и Σ_r-формула. Напомним, что Π_r (Σ_r)-формулой называется формула вида $(L_1\alpha_1)\ldots(L_s\alpha_s)\Psi$, где $(L_1\alpha_1)\ldots(L_s\alpha_s)$ — это Π_r (Σ_r)-префикс, а Ψ не содержит кванторов. Если Φ_1 и Φ_2 — формулы типа II, то выражение $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $(\Phi_1 \bigwedge \Phi_2)$, $(\Phi_1 \bigvee \Phi_2)$ тоже есть формулы типа II. Номера их, по аналогии с [12], есть числа $2^3 \cdot 3^{l_1} \cdot 5^{l_2}$, $2^5 \cdot 3^{l_1} \cdot 5^{l_2}$, $2^7 \cdot 3^{l_1} \cdot 5^{l_2}$, где l_1, l_2 — номера Φ_1 и Φ_2. Говорим, что сложность этих формул типа II не более r, если как сложность Φ_1, так и сложность Φ_2 не более r. Если Φ_1 есть формула типа II, то выражения $\neg\Phi_1$, $(\forall x_i)\Phi_1$, $(\exists x_i)\Phi_1$ есть формулы типа II. Номера их — $2^9 \cdot 3^{l_1}$, $2^{11} \cdot 3^n \cdot 5^{l_1}$, $2^{13} \cdot 3^n \cdot 5^{l_1}$, где l_1 — номер Φ_1, n — номер символа x_i. Сложность $\neg\Phi_1$ не более r, если сложность Φ_1 не более r. Если Φ_1 имеет вид $(\forall x_j)\Psi$, то сложность формулы типа II $(\forall x_i)\Phi_1$ не более r, если сложность Φ_1 не более r. Если Φ_1 имеет вид $(\exists x_j)\Psi$, то сложность формулы типа II $(\exists x_i)\Phi_1$ не более r, если сложность Φ_1 не более r. В остальных случаях сложность $(\forall x_i)\Phi_1$ и $(\exists x_i)\Phi_1$ не более r, если сложность Φ_1 не более $r - 1$. Наконец, если $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ есть арифметическое множество формул типа II ограниченной сложности и символы переменных, свободно входящие хотя бы в одну из формул $\Phi_i (i \in I)$, содержатся в списке $x_1, \ldots, x_m$ при некотором m, то выражения $\bigvee\limits_{i \in I} \Phi_i$ и $\bigwedge\limits_{i \in I} \Phi_i$ есть формулы типа II. Номера их есть числа $2^7 \cdot 3^n$, $2^5 \cdot 3^n$, где n — номер множества X номеров формул типа II Φ_i $(i \in I)$. Сложность этих формул типа II не более r, если $r \geqslant r_1 + 1$, где X есть Π_{r_1}-множество, а для каждого $i \in I$ формула типа II Φ_i имеет сложность не более r_1. Истинность формул типа II в алгебраической системе A при заданных значениях ее свободных переменных определяется, как обычно. $\bigvee\limits_{i \in I} \Phi_i$ истинно тогда и только тогда, когда Φ_i истинна при некотором $i \in I$. $\bigwedge\limits_{i \in I} \Phi_i$ истинно тогда и только тогда, когда $\neg \bigvee\limits_{i \in I} \neg \Phi_i$ истинно.

Наконец, мы рассматриваем формулы слабой логики порядка ω или, короче, формулы типа III. Нам понадобится также чуть более общее понятие формулы типа IV. Пусть R — одноместный предикатный символ, не содержащийся в нашей сигнатуре. Выражения вида $R(Q_i)$, $Q_i(Q_j)$, $Q_i(x_j)$ мы называем формулами типа IV. Если Φ_1 и Φ_2 — формулы типа IV, то $(\Phi_1 \bigwedge \Phi_2)$, $(\Phi_1 \bigvee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $\neg\Phi_1$, $(\forall x_i)\Phi_1$, $(\exists x_i)\Phi_1$, $(\forall Q_i)\Phi_1$, $(\exists Q_i)\Phi_1$ — тоже формулы типа IV. Каждая формула является формулой типа IV. Обычным образом определяются понятия свободного и связанного вхождения переменных в формулу типа IV.

Через $|A|$ будем обозначать основное множество алгебраической системы A. $|A|_0 = |A|$. Если $|A|_n$ уже определено, то через $|A|_{n+1}$ обозначим объединение множества всех конечных подмножеств множества $| A |_n$ и самого множества $| A |_n$. Пусть $| A |_\omega = \bigcup_{n \in N} | A |_n - | A |$. Алгебраическую систему A назовем допустимой, если для каждого натурального n и каждого конечного подмножества множества $| A |_n$ это подмножество не является элементом множества $| A |$. Все рассматриваемые алгебраические системы далее предполагаются допустимыми.

Истинность формулы Φ типа IV в допустимой алгебраической системе A рассматриваемой сигнатуры, когда свободным переменным $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_s}$, R, $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ формулы типа IV Φ приписаны в качестве значений элементы $X_1, \ldots, X_s$ множества $| A |_\omega$, подмножество Y множества $| A |_\omega$ и элементы $a_1, \ldots, a_r$ множества $| A |$, определяется следующим образом.

Если Φ есть формула логики предикатов первого порядка, то истинность Φ определяется обычным образом.

Также обычным образом определяется истинность формул типа IV

$$\Phi_1 \vee \Phi_2,\ \Phi_1 \wedge \Phi_2,\ \Phi_1 \to \Phi_2,\ \neg \Phi_1,\ (\forall x_i)\Phi_1,\ (\exists x_i)\Phi_1$$

через истинность Φ_1 и Φ_2. $Q_{i_l}(Q_{i_m})$ истинна тогда и только тогда, когда $X_m \in X_l$. $Q_{i_l}(x_{j_m})$ истинна тогда и только тогда, когда $a_m \in X_l$. $R(Q_{i_l})$ тогда и только тогда истинна, когда $X_l \in Y$. $(\forall Q_i)\Phi_1$ истинна тогда и только тогда, когда Φ_1 истинна при рассматриваемых значениях $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_s}$, R, $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ и любом элементе множества $| A |_\omega$ как значении Q_i. Истинность $(\exists Q_i)\Phi_1$ равносильна истинности $\neg (\forall Q_i) \neg \Phi_1$. Другими словами, символы из последовательности (2) интерпретируются как элементы множества $| A |_\omega$. Формулой типа III называется формула типа IV, не содержащая символа R.

$X \in | A |_\omega$ называется транзитивным, если $X_1 \subseteq X$ для каждого $X_1 \in X$. $X \in | A |_\omega$ называется натуральным числом, если X транзитивен и линейно упорядочен отношением $\in$. Последнее означает, что для любых X_1, $X_2 \in X$ либо $X_1 \in X_2$, либо $X_2 \in X_1$, либо $X_2 = X_1$. Например,

$$\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}\}$$

— натуральное число, обычно обозначаемое символом 4.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. *Существует формула* $\Theta_1(Q_1)$ *типа* III, *истинная в алгебраической системе* A *для данного* $X \in | A |_\omega$ *тогда и только тогда, когда* X — *натуральное число.*

Для X_1, $X_2 \in | A |_\omega \cup | A |$ символом $\langle X_1, X_2 \rangle$ обозначается элемент $\{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}$ из $| A |_\omega$. Элементы вида $\langle X_1, X_2 \rangle$, как обычно, называются упорядоченными парами. $X \in | A |_\omega$ называется функцией или отображением, если X пусто, либо

$$X = \{\langle X_1^1, X_2^1 \rangle, \ldots, \langle X_1^s, X_2^s \rangle\}$$

для некоторых X_1^1, $X_2^1, \ldots, X_1^s$, X_2^s из $| A |_\omega \cup | A |$. При этом $\{X_1^1, \ldots, X_1^s\}$ называется областью определения функции X. Если область определения функции — натуральное число, то функция называется также последовательностью.

Лемма 2. *Существуют формулы типа* III $\Theta_2(Q_1, Q_2, Q_3)$ *и* $\Theta_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ *такие, что*

а) $\Theta_2(Q_1, Q_2, Q_3)$ *истинна в алгебраической системе* A *для* X_1, X_2, $X_3 \in | A |_\omega$ *тогда и только тогда, когда* X_1, X_2, X_3 — *натуральные числа и* $X_1 + X_2 = X_3$;

б) $\Theta_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ *при тех же* A, X_1, X_2, X_3 *истинна в* A *тогда и только тогда, когда* $X_1 \cdot X_2 = X_3$.

Доказательство. а) Искомая формула типа III утверждает, что Q_1, Q_2, Q_3 — натуральные числа, Q_1 и Q_2 — подмножества Q_3 и существует одно-однозначное отображение множества Q_1 на множество Q_3—Q_2.

б) Искомая формула типа III утверждает, что Q_1, Q_2, Q_3 — натуральные числа и существует одно-однозначное отображение множества Q_1 на Q такое, что Q представляет собой множество одно-однозначных отображений множества Q_2 в Q_3, образы отображений из Q не пересекаются и в объединении дают все Q_3.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, R)$ — *формула арифметики. Существует формула типа* IV Φ^*, *обладающая следующими свойствами*:

а) Φ^* *не имеет свободных вхождений предметных переменных, а* Q_i *имеет свободное вхождение в* Φ^* *тогда и только тогда, когда* x_i *имеет свободное вхождение в* Φ;

б) $\Phi(n_1, \ldots, n_s; Y)$ *истинно в арифметике тогда и только тогда, когда в алгебраических системах* A *нашей сигнатуры истинна* Φ^* *при приписывании* $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_s}$ *значений* $n_1, \ldots, n_s$, *а* R — *значения* Y, *если* $n_1, \ldots, n_s$ *рассматривать как элементы* $|A|_\omega$, *а* Y — *как подмножество множества* $|A|_\omega$.

Доказательство проводится индукцией по числу логических связок и кванторов в Φ. Используется процедура, аналогичная той, которая применяется при обычной релятивизации кванторов. Можно считать, что атомные подформулы формулы Φ имеют вид

$$x_i + x_j = x_k, \quad x_i \cdot x_j = x_k, \quad R(x_i).$$

Тогда $(x_i + x_j = x_k)^*$ есть $\Theta_2(Q_i, Q_j, Q_k)$; $(x_i \cdot x_j = x_k)^*$ есть $\Theta_3(Q_i, Q_j, Q_k)$; $(R(x_i))^*$ есть $R(Q_i) \wedge \Theta_1(Q_i)$. Далее, если Φ_1^* и Φ_2^* уже определены, то

$$(\neg\Phi_1)^*, \quad (\Phi_1 \to \Phi_2)^*, \quad (\Phi_1 \vee \Phi_2)^*, \quad (\Phi_1 \wedge \Phi_2)^*$$

соответственно есть

$$\neg \Phi_1^*, \ \Phi_1^* \to \Phi_2^*, \ \Phi_1^* \vee \Phi_2^*, \ \Phi_1^* \wedge \Phi_2^*.$$

Наконец, $((\forall x_i)\Phi_1)^*$ есть

$$(\forall Q_i)(\Theta_1(Q_1) \to \Phi_1^*)$$

и $((\exists x_i)\Phi_1)^*$ есть

$$(\exists Q_i)(\Theta_1(Q_i) \wedge \Phi_1^*).$$

Надо только пояснить, что, например, через $\Theta_2(Q_i, Q_j, Q_k)$ мы обозначаем формулу, которая получится из $\Theta_2(Q_1, Q_2, Q_3)$ заменой каждого связанного вхождения Q_l на вхождение $Q_{l+i+j+k}$ и заменой каждого свободного вхождения Q_1 на вхождение Q_i, каждого свободного вхождения Q_2 — на вхождение Q_j, каждого свободного вхождения Q_3 — на вхождение Q_k. Аналогично понимаются обозначения $\Theta_1(Q_i)$ и $\Theta_3(Q_i, Q_j, Q_k)$.

Будем говорить, что $X \in |A|_\omega$ приписывает значения переменным, свободно входящим в формулу Φ (терм t), если X имеет вид $\varnothing$ или

$$\{\langle n_1, a_1\rangle, \ldots, \langle n_s, a_s\rangle\},$$

где $n_1, \ldots, n_s$ — попарно различные натуральные числа, $a_1, \ldots, a_s$ — элементы множества $|A|$, и если n является номером предметной переменной, свободно входящей в формулу Φ (терм t), то $n \in \{n_1, \ldots, n_s\}$. Значением формулы Φ (терма t) при X, когда X приписывает значения переменным, свободно входящим в Φ (в t), называется значение формулы Φ (терма t) при таких значениях предметных переменных, свободно входящих в Φ (в t), что если x_i свободно входит в Φ (в t) и имеет номер n_j, а $j \in \{1, \ldots, s\}$, то значением x_i является a_j. В этих определениях под Φ можно понимать также формулу типа II.

Лемма 4. *Существует формула типа* III $\Theta_4(Q_1, Q_2, x_1)$, *которая истинна в алгебраической системе A для X_1, X_2, а тогда и только тогда, когда X_1 — номер некоторого терма t нашей сигнатуры, X_2 приписывает значения переменным, входящим в t, и t принимает значение a при X_2.*

Доказательство. Формула $\Theta_4(Q_1, Q_2, x_1)$ утверждает, что существует последовательность

$$\{\langle 0, \langle n_0, y_0\rangle\rangle, \ldots, \langle m, \langle n_m, y_m\rangle\rangle\},$$

где $n_0, \ldots, n_m$ — номера термов, $n_m = Q_1$, $y_m = x_1$, и что для каждого $i \in \{0, \ldots, m\}$ либо n_i — номер предметной переменной и $\langle n_i, y_i\rangle \in Q_2$, либо для одного из сигнатурных символов операций, которых конечное число, скажем, s-местного f, существуют такие $j_1, \ldots, j_s < i$, что $n_{j_1}, \ldots$ $\ldots, n_{j_s}$ — номера термов $t_1, \ldots, t_s$, терм $f(t_1, \ldots, t_s)$ имеет номер n_i и

$$y_i = f(y_{j_1}, \ldots, y_{j_s}).$$

Лемма 5. *Для любого натурального числа r множество номеров формул типа* II *сложности не более r является арифметическим.*

Доказательство. Достаточно показать, что существует такая формула арифметики $\alpha_r(x_1, x_2)$, что $\alpha_r(n, m)$ истинно в арифметике тогда и только тогда, когда n является номером формулы типа II сложности не более r, свободные переменные которой содержатся среди $x_1, \ldots, x_m$. При этом удобно использовать формулы арифметики $\beta_r(x_1, x_2)$, для которых $\beta_r(n, m)$ истинно тогда и только тогда, когда n является номером формулы типа II сложности не более r, в которую x_m входит свободно.

Для $r = 0$ существование α_r и β_r очевидно. Допустим, что α_r и β_r уже построены.

Тогда $\alpha_{r+1}(x, y)$ утверждает, что x является номером булевой комбинации выражений в конечном числе и при этом номер каждого из этих выражений либо является номером формулы типа II сложности не более r, свободные переменные которой содержатся среди $x_1, \ldots, x_y$, либо является номером выражения вида

$$(\exists x_{j_1}) \ldots (\exists x_{j_s})\Psi \text{ или } (\forall x_{j_1}) \ldots (\forall x_{j_s})\Psi,$$

где номер m выражения Ψ удовлетворяет $\alpha_r(m, n)$, а n — наибольшее из чисел $y, j_1, \ldots, j_s$ и x_j не входит свободно в Ψ для j, отличных от $j_1, \ldots, j_s$ и удовлетворяющих неравенству $y < j \leqslant n$, либо является номером конъюнкции или дизъюнкции арифметического множества выражений и тогда есть $2^5 \cdot 3^m$ или $2^7 \cdot 3^m$, и в обоих случаях m удовлетворяет формуле

$$(\forall x_1)(\Psi_r(x_1, m) \to \alpha_r(x_1, y)),$$

где $\Psi_r(x_1, x_2)$ — такая построенная в § 0 формула арифметики, что $\Psi_r(n_1, n_2)$ истинно тогда и только тогда, когда n_2 — номер Π_r-множества, а n_1 — элемент Π_r-множества номера n_2 и m — номер Π_r-множества.

Формула арифметики β_{r+1} строится аналогично.

Лемма 6. *Существует формула типа* III $\Theta^r(Q_1, Q_2)$, *которая истинна в алгебраической системе A для X_1, $X_2 \in |A|_\omega$ тогда и только тогда, когда X_1 является номером формулы типа* II Φ *сложности не более r, X_2 приписывает значения переменным, свободно входящим в Φ, и Φ истинна в A при X_2.*

Доказательство. Формула типа III $\Theta^r(Q_1, Q_2)$ является конъюнкцией $((\exists x_2)\alpha_r(x_1, x_2))^*$, формулы типа III $\Theta_1^r(Q_1, Q_2)$, которая утверждает, что Q_2 приписывает значения переменным, свободно входящим в формулу типа II номера Q_1 и формулы типа III $\Theta_2^r(Q_1, Q_2)$, которая описывается ниже.

Формула типа III $\Theta_3^r(Q_1, Q_2)$ утверждает, что существует последовательность

$$\{\langle 0, \langle n_0, m_0\rangle\rangle, \ldots, \langle l, \langle n_l, m_l\rangle\rangle\},$$

где $n_0, \ldots, n_l$ — номера формул типа II сложности не более r, а $m_0, \ldots, m_l \in \{0, 1\}$, удовлетворяющая следующим условиям: $n_l = Q_1$, $m_l = 1$.

Если $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы вида $t_1 = t_2$, то существуют такие $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, x_1, x_2, что $n^{(1)}$ — номер терма t_1, $n^{(2)}$ — номер терма t_2, $\Theta_4(n^{(1)}, Q_2, x_1)$ и $\Theta_4(n^{(2)}, Q_2, x_2)$ истинны, а $m_i = 1$, если $x_1 = x_2$, и $m_i = 0$, если $x_1 \neq x_2$.

Если $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы вида $P(t_1, \ldots, t_s)$, где P — s-местный предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_s$ — термы, то существуют такие $n^{(1)}, \ldots, n^{(s)}$ и $x_1, \ldots, x_s$, что $n^{(j)}$ — номер терма t_j $(j = 1, \ldots, s)$, $\Theta_4(n^{(j)}, Q_2, x_j)$ истинны для $j = 1, \ldots, s$, а $m_i = 1$, если $P(x_1, \ldots, x_s)$ истинно, и $m_i = 0$, если $P(x_1, \ldots, x_s)$ ложно.

Если $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II вида $\neg\Phi$, то существует такое натуральное $j < i$, что n_j — номер формулы типа II Φ, а $m_i = 1$, если $m_j = 0$, и $m_i = 0$, если $m_j = 1$.

Если $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II одного из видов $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$, то существуют такие натуральные $j_1, j_2 < i$, что n_{j_1} — номер Φ_1, n_{j_2} — номер Φ_2, а значение m_i определяется через значения m_{j_1} и m_{j_2} по известным таблицам истинности.

Если $r > 0$, $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II вида $(\exists x_{i_1}) \ldots (\exists x_{i_s})\Psi$, где Ψ не начинается с квантора существования, то $m_i = 1$ тогда и только тогда, когда существует Q_3, приписывающее значения переменным, свободно входящим в Ψ, и расширяющее Q_2 [1]), что $\Theta^{r-1}(Q_4, Q_3)$, где Q_4 — номер Ψ, истинно.

Если $r > 0$, $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II вида $(\forall x_{i_1}) \ldots (\forall x_{i_s})\Psi$, где Ψ не начинается с квантора всеобщности, то $m_i = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого Q_3, приписывающего значения переменным, свободно входящим в Ψ, и расширяющего Q_2, истинно $\Theta^{r-1}(Q_4, Q_3)$, где Q_4 — номер Ψ.

Если $r > 0$, $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II вида $\bigvee_{j \in J} \Phi_j$, то $m_i = 1$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент n в Π_{r-1}-множестве номера m, что истинно $\Theta^{r-1}(n, Q_2)$, где $n_i = 2^7 \cdot 3^m$.

Если $r > 0$, $i \in \{0, \ldots, l\}$ и n_i — номер формулы типа II вида $\bigwedge_{j \in I} \Phi_j$, то $m_i = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого элемента n из Π_{r-1}-множества номера m истинно $\Theta^{r-1}(n, Q_2)$, где $n_i = 2^5 \cdot 3^m$.

Лемма 7. *Каждой формуле типа* II Φ *можно сопоставить формулу типа* III Ψ *без свободных вхождений предикатных переменных так, что в* Φ *и* Ψ *входят свободно одни и те же символы предметных переменных и в каждой алгебраической системе рассматриваемой сигнатуры при любом приписывании значений свободным предметным переменным истинность* Φ *совпадает с истинностью* Ψ.

Доказательство. Если номер Φ равен n и $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — символы предметных переменных, свободно входящие в Φ, то в качестве Ψ можно взять

$$(\exists Q_1)(\exists Q_2)(Q_1 = n \wedge \Theta^r(Q_1, Q_2) \wedge Q_2 = \{\langle n_1, x_{i_1}\rangle, \ldots, \langle n_s, x_{i_s}\rangle\}),$$

где n_1 — номер $x_{i_1}, \ldots, n_s$ — номер x_{i_s}, а r таково, что сложность Φ не более r.

Лемма 8. *Каждой формуле типа* III Φ *без свободных вхождений символов предикатных переменных можно сопоставить формулу типа* I Ψ

[1]) В том смысле, что если $\langle n, x\rangle \in Q_2$ и n не есть номер $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, то $\langle n, x\rangle \in Q_3$.

без свободных вхождений предикатных переменных так, что Φ *и* Ψ *имеют свободные вхождения одних и тех же символов предметных переменных и в каждой бесконечной алгебраической системе рассматриваемой сигнатуры при любом приписывании значений свободным предметным переменным истинность* Φ *совпадает с истинностью* Ψ.

Доказательство. Говорят, что двухместный предикат H является частичным порядком, если он транзитивен и из $\langle x, y\rangle \in H$ следует, что $\langle y, x\rangle \notin H$. Объединение

$$\{x \mid (\exists y)H(x, y)\} \cup \{x \mid (\exists y)H(y, x)\}$$

называется областью действия предиката H и обозначается через обл(H). a называется минимальным элементом H, если $a \in$ обл(H) и $\langle y, a\rangle \notin H$ для каждого y. a называется наибольшим элементом H, если $\langle y, a\rangle \in H$ для любого такого y, что $y \neq a$ и $y \in$ обл(H), и $a \in$ обл(H). Скажем, что конечные двухместный предикат H_2 и частичный порядок H_1 согласованы, если

а) из $x \neq y$ и $\langle x, y\rangle \in H_2$ следует, что $\langle x, y\rangle \in H_1$;

б) если $x_1, x_2 \in$ обл(H_1) и

$$\{y \mid y \neq x_1, \langle y, x_1\rangle \in H_2\} = \{y \mid y \neq x_2, \langle y, x_2\rangle \in H_2\},$$

то либо x_1 и x_2 — минимальные элементы H_1, либо $x_1 = x_2$;

в) имеется не более одного такого x, что $\langle x, x\rangle \in H_2$, и из $\langle x, x\rangle \in H_2$ следует, что x является минимальным элементом H_1;

г) H_1 имеет наибольший элемент a; для каждого $y \in$ обл(H_1) существуют такие $x_1, \ldots, x_s = a$, что $x_1 = y$ и $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \in H_2$ для $i = 1, \ldots, s-1$.

Теперь каждое вхождение $Q_i(Q_j)$ в Φ заменяем на вхождение формулы, которая утверждает, что существует одно-однозначное отображение H области действия H_{2j+1} в область действия H_{2i+1}, которое является изоморфизмом

$$\langle \text{обл}(H_{2j+1}), H_{2j+2}\rangle \text{ в } \langle \text{обл}(H_{2i+1}), H_{2i+2}\rangle$$

(т. е. $\langle H(x), H(y)\rangle \in H_{2i+2}$ тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle \in H_{2j+2}$, для всех $x, y \in$ обл(H_{2j+1})), которое оставляет на месте такие минимальные элементы x из области действия H_{2j+1}, для которых

$$\langle x, x\rangle \notin H_{2j+2}$$

и для которого

$$\langle H(y_0), x_0\rangle \in H_{2i+2},$$

где x_0 — наибольший элемент H_{2i+1}, а y_0 — наибольший элемент H_{2j+1}. Вхождение $Q_i(x_j)$ заменяется на вхождение формулы, которая утверждает, что x_j является минимальным элементом H_{2i+1},

$$(x_j, x_j) \notin H_{2i+2} \text{ и } \langle x_j, x_0\rangle \in H_{2i+2},$$

где x_0 — наибольший элемент H_{2i+1}. Квантор $(\forall Q_i)$ заменяем на

$$(\forall H_{2i+1})(\forall H_{2i+2})((H_{2i+1} \text{ — частичный порядок } \wedge H_{2i+2}, H_{2i+1} \text{ согласованы}) \to \ldots).$$

Квантор $(\exists Q_i)$ заменяем на

$$(\exists H_{2i+1})(\exists H_{2i+2})((H_{2i+1} \text{ — частичный порядок } \wedge H_{2i+2}, H_{2i+1} \text{ согласованы}) \wedge \ldots).$$

Ясно, что полученная после указанных замен из Φ формула типа I Ψ годится.

Лемма 9. *Каждой формуле типа* I Φ, *не содержащей свободных вхождений предикатных переменных, можно сопоставить формулу типа* II *с теми же свободно входящими символами предметных переменных так, что в каждой алгебраической системе рассматриваемой сигнатуры при любом приписывании значений свободным предметным переменным истинность* Φ *совпадает с истинностью этой формулы типа* II.

Доказательство. Формулу Φ легко привести к пренексному виду $(L_1)(L_2)\ldots(L_k)\Phi_1$, где L_i — выражение одного из видов $\exists H_j$, $\forall H_j$, $\exists x_j$, $\forall x_j$, а Φ_1 не содержит кванторов ни по каким переменным. Можно считать, что если L_i — квантор по предикатной переменной, то эта переменная есть H_i. Пусть s — такое натуральное число, что переменные x_i для $i \geqslant s$ не имеют вхождений в Φ_1. Пусть a_i^{-1} — пустое множество. Через a_i^l обозначим множество

$$\{\langle x_{s+2i}, x_{s+2i+1}\rangle, \langle x_{s+2k+2i}, x_{s+2k+2i+1}\rangle, \ldots \\ \ldots, \langle x_{s+2lk+2i}, x_{s+2lk+2i+1}\rangle\},$$

через $(\exists a_i^l)$ обозначим

$$(\exists x_{s+2i})(\exists x_{s+2i+1})\ldots(\exists x_{s+2lk+2i})(\exists x_{s+2lk+2i+1})$$

и через $(\forall a_i^l)$ обозначим

$$(\forall x_{s+2i})(\forall x_{s+2i+1})\ldots(\forall x_{s+2lk+2i})(\forall x_{s+2lk+2i+1}).$$

Через $(\exists a_i^{-1})$ и $(\forall a_i^{-1})$ обозначим пустое слово; через $\Phi(a_1^{l_1}, \ldots, a_k^{l_k})$ обозначим формулу, которая получается из Φ_1 заменой всех подформул вида $H_i(u_1, u_2)$ на

$$\bigvee_{\langle x', x''\rangle \in a_i^{l_i}} (u_1 = x' \wedge u_2 = x'')$$

для $i = 1, \ldots, k$. Пусть $(L_i)^*$ есть (L_i), если L_i есть $\exists x_j$ или $\forall x_j$, и $(L_i)^*$ есть

$$\bigvee_{l_i=-1}^{\infty} (\exists a_i^{l_i}),$$

если L_i есть $\exists H_i$, $(L_i)^*$ есть

$$\bigwedge_{l_i=-1}^{\infty} (\forall a_i^{l_i}),$$

если L_i есть $\forall H_i$. Тогда очевидно, что

$$(L_1)^* \ldots (L_k)^* \Phi(a_1^{l_1}, \ldots, a_k^{l_k})$$

есть искомая формула типа II.

§ 2. Конечный форсинг

Определения и леммы 1—3, 5—8 этого параграфа введены А. Робинсоном и содержатся в [26].

Пусть C — некоторое бесконечное множество нульместных символов операций, о которых мы будем предполагать, что символы из C не являются сигнатурными символами рассматриваемой сигнатуры. C называем множеством форсинговых символов.

Пусть T — теория, т. е. некоторое множество замкнутых формул рассматриваемой сигнатуры. Напомним, что формула (терм) называется замкнутой (замкнутым), если она (он) не содержит свободных вхождений символов переменных. Будем рассматривать также замкнутые формулы расширенной сигнатуры, полученной из первоначальной присоединением всех символов из C.

Формула называется базисной, если она является либо атомной, т. е. имеет вид равенства двух термов, нульместного предикатного символа или выражения вида $P(t_1, \ldots, t_s)$, где P — s-местный предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_s$ — термы, либо отрицанием атомной формулы. Конечное множество замкнутых базисных формул расширенной сигнатуры называется условием для T, если это множество совместно с T, т. е. существует такая алгебраическая система расширенной сигнатуры, в которой все формулы из этого множества и из T истинны.

Пусть Φ — замкнутая формула расширенной сигнатуры. Сейчас мы определим, что мы понимаем, когда говорим «условие p форсирует в теории T формулу Φ» и пишем «$p \Vdash_T \Phi$». Будем при этом опускать упоминание о T, если ясно, какая теория имеется в виду.

Если Φ — атомная формула, то «$p \Vdash \Phi$». равносильно «$\Phi \in p$». Если Φ есть $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, то «$p \Vdash \Phi$» равносильно «$p \Vdash \Phi_1$ и $p \Vdash \Phi_2$». Если Φ есть $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, то «$p \Vdash \Phi$» равносильно «$p \Vdash \Phi_1$ или $p \Vdash \Phi_2$». Если Φ есть $\neg \Phi_1$, то «$p \Vdash \Phi$» равносильно «не существует такого условия p_1, что $p_1 \supseteq p$ и $p_1 \Vdash \Phi_1$». Если Φ есть $(\exists x_i)\Phi_1$, а $(\Phi_1)_t^{x_i}$ — результат замены каждого свободного вхождения x_i в Φ_1 на вхождение терма t, то «$p \Vdash \Phi$» равносильно «существует такой замкнутый терм t расширенной сигнатуры, что $p \Vdash (\Phi_1)_t^{x_i}$». Наконец, «$p \Vdash (\Phi_1 \to \Phi_2)$» равносильно «$p \Vdash (\neg \Phi_1 \vee \Phi_2)$», а «$p \Vdash (\forall x_i)\Phi_1$» равносильно «$p \Vdash \neg (\exists x_i) \neg \Phi_1$».

Всякое отображение множества C в основное множество алгебраической системы A первоначальной сигнатуры обогащает A до системы расширенной сигнатуры. Такое отображение мы называем нумерацией A, если образ C порождает A, т. е. A не имеет собственных подсистем, содержащих образ C. Если τ — нумерация A, то множество всех замкнутых базисных формул, истинных в созданном τ обогащении A, называется τ-диаграммой A и обозначается через $D_\tau(A)$. Мы будем опускать упоминание о τ, если ясно, какая нумерация имеется в виду. Алгебраическая система A называется моделью теории T, если все формулы из T истинны в A. Система A называется T-генерической, если A является подсистемой некоторой модели теории T и если существует такая нумерация τ системы A, что для каждой замкнутой формулы Φ расширенной сигнатуры истинность Φ в созданном τ обогащении A равносильна существованию такого условия p, что $p \subseteq D_\tau(A)$ и $p \Vdash \Phi$ [1]).

Напомним, что формула называется Π_r-формулой, если она имеет пренексный вид и ее префикс является Π_r-префиксом.

Система A называется экзистенциально замкнутой в T, если она является подсистемой некоторой модели T и для любой Π_2-формулы Φ нашей сигнатуры и любой модели B теории T, в которой A является подсистемой, из того, что Φ истинна в B, когда свободно входящим в Φ символам предметных переменных приписаны некоторые значения из A, следует, что Φ истинна в A при тех же значениях свободных переменных. Ясно, что если T состоит из Π_2-формул и A экзистенциально замкнута в T, то A — модель T.

Подсистема A системы B сигнатуры Ω называется элементарной подсистемой, если для всякой формулы Φ сигнатуры Ω из того, что Φ истинна в B, когда свободно входящим в Φ символам предметных переменных приписаны некоторые значения из A, следует, что Φ истинна в A при тех же значениях свободных переменных. Из теоремы компактности легко следует, что если A — экзистенциально замкнута в T, а B — элементарная подсистема A, то B тоже экзистенциально замкнута в T.

Лемма 1. *Если A является T-генерической, то A экзистенциально замкнута в T.*

Доказательство. Пусть Φ_1 — Π_2-формула. Можно считать, что Φ_1 имеет вид

$$(\forall x_{s+1}) \ldots (\forall x_{s+l})\Phi,$$

где Φ — Σ_1-формула. Пусть B — модель T, B — расширение A и Φ_1 истинна в B, когда свободно входящим в Φ_1 предметным переменным приписаны

[1]) Говорим, что A — генерическая для τ или относительно τ.

некоторые значения из A. Пусть $a_1, \ldots, a_l$ — произвольные элементы A и приписаны в качестве значений $x_{s+1}, \ldots, x_{s+l}$. При этих значениях Φ истинна в B, а надо показать, что при этих значениях Φ истинна и в A. Имеем также некоторую нумерацию τ системы A. Значения свободно входящих в Φ переменных являются значениями некоторых замкнутых термов расширенной сигнатуры. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что в созданном τ обогащении A истинна замкнутая формула Φ', полученная из Φ заменой всех свободно входящих переменных на термы расширенной сигнатуры, принимающие те же значения из A. Можно считать, что Φ' имеет вид

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_s)\Psi,$$

где Ψ есть конъюнкция базисных формул. Допустим, что Φ' ложна в рассматриваемом обогащении A. Тогда в нем истинна $\neg\Phi'$. В силу генеричности A найдется условие $p \subseteq D_\tau(A)$, форсирующее формулу $\neg\Phi'$. Пусть $c_1, \ldots$ $\ldots, c_s$ из C не встречаются ни в формуле Φ', ни в условии p. Пусть p_1 содержит все элементы p и все конъюнктивные члены формулы

$$(\Psi)^{x_1, \ldots, x_s}_{c_1, \ldots, c_s},$$

которая получается из Ψ заменой $x_1, \ldots, x_s$ на $c_1, \ldots, c_s$. Ясно, что p_1 является условием, так как p_1 истинно в обогащении B, в котором символам $c_1, \ldots, c_s$ приписаны такие значения $b_1, \ldots, b_s$, что в созданном τ обогащении B истинна Ψ при приписывании символам x_i значений b_i $(i = 1, \ldots, s)$. Заметим, что

$$(1) \qquad p_1 \Vdash (\Psi)^{x_1, \ldots, x_s}_{c_1, \ldots, c_s}.$$

По определению, достаточно показать, что p_1 форсирует каждый конъюнктивный член этой формулы. Если этот член — атомная формула, то она входит в p_1 и, значит, форсируется p_1. Если же этот член — отрицание атомной формулы, то пусть она имеет вид $\neg\Psi_1$. Тогда $\neg\Psi_1 \in p_1$ и, значит, никакое условие, содержащее p_1, не содержит Ψ_1 и поэтому не форсирует Ψ_1. Значит, p_1 форсирует $\neg\Psi_1$. Итак, (1) доказано. Из (1) следует, что $p_1 \Vdash \Phi'$. Это, однако, противоречит тому, что $p \Vdash \neg\Phi'$.

Следствие. *Если теория T состоит из Π_2-формул, то каждая T-генерическая система является моделью T.*

Лемма 2. *Пусть сигнатура теории T конечна или счетна. Если p — условие для T, то существует T-генерическая система A относительно нумерации τ системы A, для которой $p \subseteq D_\tau(A)$.*

Перед доказательством леммы 2 сделаем два замечания.

Лемма 3. а) *Пусть A — подсистема некоторой модели теории T, τ — нумерация A и для каждой замкнутой формулы Φ расширенной сигнатуры найдется условие $p \subseteq D_\tau(A)$, что либо $p \Vdash \Phi$, либо $p \Vdash \neg\Phi$. Тогда A является T-генерической системой относительно нумерации τ.*

б) *Если $p \Vdash \Phi$ и $p_1 \supseteq p$, то $p_1 \Vdash \Phi$.*

Доказательство. б) доказываем индукцией по числу кванторов и связок в Φ. Для атомной Φ б) очевидно. Если б) верно для $(\Phi_1)^{x_i}_t$ для любого замкнутого терма t расширенной сигнатуры, то б) верно и для $(\exists x_i)\Phi_1$. Если б) верно для Φ_1 и Φ_2, то верно и для $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \wedge \Phi_2$. Если б) верно для Φ_1 и $p \Vdash \neg\Phi_1$, а $p_1 \supseteq p$, то никакое условие, расширяющее p_1, не форсирует Φ_1, значит, $p_1 \Vdash \neg\Phi_1$.

а) Опять используем индукцию по числу кванторов и связок в Φ. Доказываем, что Φ истинна в созданном τ обогащении A тогда и только тогда, когда найдется условие $p \subseteq D_\tau(A)$, что $p \Vdash \Phi$.

Если Φ — атомная, это очевидно. Если это верно для $(\Phi_1)_t^{x_i}$ при любом замкнутом терме t расширенной сигнатуры, то это верно и для $(\exists x_i)\Phi_1$. Если это верно для Φ_1 и Φ_2, то верно для $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \wedge \Phi_2$. Если это верно для Φ_1, $p \subseteq D_\tau(A)$ и $p \Vdash \neg\Phi_1$, то Φ_1 ложна в созданном τ обогащении A и, значит, $\neg\Phi_1$ истинна в этом обогащении. Действительно, иначе некоторое условие $p_1 \subseteq D_\tau(A)$ форсировало бы Φ_1 и тогда по б) $p \cup p_1$ форсировало бы как Φ_1, так и $\neg\Phi_1$, что невозможно. Если $\neg\Phi_1$ истинно в обогащении A, созданном τ, то рассмотрим то условие $p \subseteq D_\tau(A)$, что $p \Vdash \neg\Phi_1$ или $p \Vdash \Phi_1$. Форсировать Φ_1 условие p не может, ибо тогда Φ_1 была бы истинна в созданном τ обогащении A. Значит, $p \Vdash \neg\Phi_1$.

Доказательство леммы 2. Считаем, что C счетно. Пусть $\Phi^0, \Phi^1, \ldots$ — перечисление всех замкнутых формул расширенной сигнатуры. Построим возрастающую последовательность условий $p_0, p_1, \ldots$ Пусть $p_0 = p$. Если p_n построено и $p_n \Vdash \neg\Phi^n$, то пусть $p_{n+1} = p_n$. Если же p_n не форсирует $\neg\Phi^n$, то в качестве p_{n+1} выберем некоторое условие, форсирующее Φ^n и расширяющее p_n. Пусть $p_\infty = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} p_n$. Тогда по теореме компактности p_∞ совместно с T, ибо каждая конечная часть p_∞ совместна с T. Пусть A_1 — модель $T \cup p_\infty$. Пусть A — обеднение до первоначальной сигнатуры подсистемы системы A_1, порожденной значениями замкнутых термов расширенной сигнатуры, а τ — та нумерация A, которая делает A подсистемой системы A_1. Покажем, что A — T-генерическая система. Действительно, если Φ — замкнутая формула расширенной сигнатуры, то Φ есть Φ^n для некоторого n и либо $p_{n+1} \Vdash \Phi$, либо $p_{n+1} \Vdash \neg\Phi$. Ясно, что $p_{n+1} \subseteq D_\tau(A)$.

Пусть T — теория сигнатуры Ω; I_1 — конечное или счетное множество; $\{A_i \mid i \in I_1\}$ — системы сигнатуры Ω; A_i порождается $a_1^i, \ldots, a_{n_i}^i$;

$$A_i' = (A_i;\ a_1^i, \ldots, a_{n_i}^i)$$

— обогащение A, полученное добавлением $a_1^i, \ldots, a_{n_i}^i$ в качестве новых выделенных элементов. Считаем, что A_i' имеет сигнатуру $\Omega_{n_i}^i$, которая получается из Ω добавлением n_i нульместных символов операций $d_1^i, \ldots, d_{n_i}^i$. Через $\Delta(A_i')$ обозначаем совокупность всех замкнутых базисных формул сигнатуры $\Omega_{n_i}^i$, истинных в A_i'. Считаем, что $\Omega_{n_i}^i \cap \Omega_{n_j}^j = \Omega$ для $i, j \in I_1$, $i \neq j$. Пусть $I \subseteq I_1$, $\Omega^* = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_{n_i}^i$, $T^* = T \cup \bigcup\limits_{i\in I} \Delta(A_i')$. Будем расширенной называть сигнатуру, полученную из Ω^* добавлением счетного множества форсинговых символов.

Обобщением леммы 2 является следующая лемма 4, заимствованная нами из диссертации О. В. Белеградека [1] (см. в диссертации лемму 0.2.4). Следствие и идея доказательства имеются уже в [45].

Лемма 4. *Пусть теория T^* сигнатуры Ω^* имеет модели, а первоначальная сигнатура Ω конечна или счетна. Пусть для любого условия p для теории T^*, любого $i \in I_1 - I$ и любых замкнутых термов $t_1, \ldots, t_n$ расширенной сигнатуры найдется такая $\Phi \in \Delta(A_i')$, что $T^* \cup p$ совместно с $\neg\Phi'$, где Φ' получается из Φ заменой вхождений $d_1^i, \ldots, d_{n_i}^i$ на вхождения $t_1, \ldots, t_{n_i}$. Тогда*

а) *существует T^*-генерическая система, в которую A_i не вкладывается изоморфно ни для какого $i \in I_1 - I$;*

б) *обеднение любой T^*-генерической системы до системы сигнатуры Ω является экзистенциально замкнутой в T системой.*

Доказательство. б) Пусть B — такое обеднение системы B^1, B — подсистема системы B_1 и B_1 — модель T. Сделаем B_1 моделью теории T^*, интерпретируя d_j^i так же, как и в B^1 ($i \in I$; $j = 1, \ldots, n_i$). Эту модель обозначим через B_1^1. Так как B^1 экзистенциально замкнута в T^*, то любая Π_2-формула Ψ сигнатуры Ω^*, истинная в B_1^1 при приписывании свободно входящим в Ψ символам предметных переменных некоторых значений из B^1, при этих значениях истинна и в B^1. Тем более это верно для любой Π_2-формулы сигнатуры Ω.

а) Заметим сначала, что для любого $i \in I_1 - I$, любых замкнутых термов $t_1, \ldots, t_{n_i}$ расширенной сигнатуры и любого условия p найдутся такое условие p_1 и замкнутая атомная формула φ сигнатуры $\Omega_{n_i}^i$, что $p_1 \supseteq p$ и, если φ' получается из φ заменой $d_1^i, \ldots, d_{n_i}^i$ на $t_1, \ldots, t_{n_i}$, то либо $p_1 \Vdash \varphi'$, а $\neg\varphi \in \Delta(A_i')$, либо $p_1 \Vdash \neg\varphi'$, а $\varphi \in \Delta(A_i')$.

Действительно, пусть Φ' получается из Φ заменой $d_1^i, \ldots, d_{n_i}^i$ на $t_1, \ldots, t_{n_i}$ и $T^* \cup p$ совместно с $\neg\Phi'$, где $\Phi \in \Delta(A_i')$. Если Φ — атомная, то в качестве φ надо взять Φ, а в качестве p_1 взять $p \cup \{\neg\Phi'\}$. Если же Φ есть $\neg\Psi$, то в качестве φ надо взять Ψ, а в качестве p_1 взять $p \cup \{\Psi'\}$, где Ψ' получается из Ψ заменой $d_1^i, \ldots, d_{ni}$ на $t_1, \ldots, t_{n_i}$.

Теперь занумеруем всеми натуральными числами все замкнутые формулы расширенной сигнатуры и все пары вида $\langle i, \langle t_1, \ldots, t_{n_i}\rangle\rangle$, где $i \in I_1 - I$, а $\langle t_1, \ldots, t_{n_i}\rangle$ — последовательность замкнутых термов расширенной сигнатуры.

Строим возрастающую последовательность условий.

Пусть p_0 — пустое условие. Пусть p_m построено. Если p_m форсирует отрицание формулы номера m, то $p_m' = p_m$. Если же p_m не форсирует отрицание этой формулы, то в качестве p_m' выбираем условие, расширяющее p_m и форсирующее эту формулу. Если $\langle i, \langle t_1, \ldots, t_{n_i}\rangle\rangle$ занумерован числом m, то в качестве p_{m+1} выбираем такое условие, которое расширяет p_m' и для которого найдется такая замкнутая атомная формула φ сигнатуры $\Omega_{n_i}^i$, что либо $p_{m+1} \Vdash \varphi'$, а $\neg\varphi \in \Delta(A_i')$, либо $p_{m+1} \Vdash \neg\varphi'$, а $\varphi \in \Delta(A_i')$. Пусть $p_\infty = \bigcup_{m=0}^{\infty} p_m$. Как и в доказательстве леммы 2, рассматриваем модель G_1 теории $T^* \cup p_\infty$. Пусть G — обеднение до системы сигнатуры Ω^* подсистемы, порожденной в G_1 значениями замкнутых термов расширенной сигнатуры. Как и в доказательстве леммы 2, убеждаемся, что G — генерическая система.

Остается показать для $i \in I_1 - I$, что A_i в G не вкладывается изоморфно. Действительно, если ρ — изоморфизм A_i в G и ρa_1^i есть значение $t_1, \ldots, \rho a_{n_i}^i$ есть значение t_{n_i} в G_1, а последовательность $\langle i, \langle t_1, \ldots, t_{n_i}\rangle\rangle$ занумерована числом m, то найдется такая φ, что либо $p_{m+1} \Vdash \neg\varphi'$, а $\varphi \in \Delta(A_i')$, либо $p_{m+1} \Vdash \varphi'$, а $\neg\varphi \in \Delta(A_i')$. В первом случае φ' ложно в G_1, но $\varphi \in \Delta(A_i')$. Во втором случае φ' истинна в G_1, но $\neg\varphi \in \Delta(A_i')$. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что ρ — изоморфизм.

Следствие. *Пусть $i \in I_1$. Если множество номеров теории T рекурсивно перечислимо, а теория T имеет модели и множество номеров формул из $\Delta(A_i')$ не является рекурсивным, то существует такая T-генерическая система, в которую A_i не вкладывается изоморфно.*

Доказательство. Пусть $I_1 = \{i\}$. Полагаем I пустым. Тогда $T^* = T$. Если для некоторого условия p и некоторых замкнутых термов $t_1, \ldots, t_{n_i}$ расширенной сигнатуры $T \cup p$ не совместно с $\neg\Phi'$ ни для какой $\Phi \in \Delta(A_i')$, то из $T \cup p$ выводим все формулы Φ' для $\Phi \in \Delta(A_i')$. Теперь для произвольной замкнутой атомной формулы Ψ сигнатуры $\Omega_{n_i}^i$ последовательно перечисляем выводы из $T \cup p$ и определяем, является ли такой вывод выводом одной из формул Ψ' или $\neg \Psi'$. Так как либо $\Psi \in \Delta(A_i')$, либо $\neg\Psi \in \in \Delta(A_i')$, то через конечное число шагов мы получим либо вывод Ψ', либо вывод $\neg\Psi'$. В первом случае $\Psi \in \Delta(A_i')$, а во втором — $\neg \Psi \in \Delta(A_i')$. Значит, множество номеров $\Delta(A_i')$ рекурсивно, а это противоречит условию. Теперь из леммы 4, а) получаем рассматриваемое следствие.

Две алгебраические системы одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если каждая замкнутая формула этой сигнатуры, истинная в одной из них, истинна и в другой.

Скажем, что теория T обладает свойством совместного вложения, если $p_1 \cup p_2$ является условием для любых таких условий p_1 и p_2, что форсинговые символы, входящие хотя бы в одну формулу одного из этих условий, не входят ни в какую формулу другого из этих условий.

Лемма 5. *Любые две T-генерические системы теории T, обладающей свойством совместного вложения, элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть G_1 — T-генерическая система при нумерации τ_1, а G_2 — T-генерическая система при нумерации τ_2. Можно считать, что множества форсинговых символов нумераций τ_1 и τ_2 не пересекаются. Пусть Φ истинна в G_1 и ложна в G_2. Тогда найдутся условия $p_1 \subseteq \subseteq D_{\tau_1}(G_1)$, $p_2 \subseteq D_{\tau_2}(G_2)$ такие, что $p_1 \Vdash \Phi$, $p_2 \Vdash \neg\Phi$. Но теперь $p_1 \cup p_2$ форсирует как Φ, так и $\neg\Phi$. Противоречие.

Для дальнейшего важно, что система, генерическая при одной нумерации, является генерической при всякой другой нумерации.

Для доказательства нам потребуется несколько простых замечаний.

Непосредственно индукцией по числу кванторов и связок формулы Φ доказывается, что если ρ — одно-однозначное отображение C в C, Φ^ρ и p^ρ получаются из Φ и p заменой каждого вхождения $c \in C$ на вхождение ρc, то

$$(p \Vdash \Phi) \Leftrightarrow (p^\rho \Vdash \Phi^\rho).$$

Лемма 6. *Пусть C и C' — два бесконечных множества форсинговых символов, а форсинговые символы, встречающиеся в p или Φ, принадлежат как C, так и C'. Тогда форсируемость условием p формулы Φ не зависит от того, взять в качестве множества форсинговых символов C или C'.*

Доказательство. Можно считать, что $C \subseteq C'$. Если Φ — атомная, утверждение очевидно. Если оно верно для Φ_1 и Φ_2, то верно и для $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \wedge \Phi_2$. Пусть оно верно для $(\Phi_1)_t^{x_i}$ для всякого замкнутого терма t, форсинговые сиволы которого входят в C. По определению

$$(p \Vdash (\exists x_i)\Phi_1) \Leftrightarrow (\text{существует } t, \text{ что } p \Vdash (\Phi_1)_t^{x_i}).$$

Пусть ρ — одно-однозначное отображение C' в C', оставляющее символы, входящие в p или в $(\exists x_i)\Phi_1$, на месте, а форсинговые символы из t переводящее в символы из C. Тогда

$$(p \Vdash (\Phi_1)_t^{x_i}) \Leftrightarrow (p \Vdash (\Phi_1)_{t^\rho}^{x_i}),$$

где t^ρ получается из t заменой каждого вхождения c на вхождение ρc. Значит,

$$(p \Vdash (\exists x_i)\Phi_1) \Leftrightarrow (\text{существует терм } t \text{ с форсинговыми символами из } C, \text{ что } p \Vdash (\Phi_1)_t^{x_i}).$$

По индукционному предположению, правая часть не зависит от того, какое множество C или C' выбрано в качестве множества форсинговых символов. Пусть лемма верна для Φ_1. По определению,

$$(p \Vdash \neg \Phi_1) \Leftrightarrow (\text{не существует } q \supseteq p, \text{ что } q \Vdash \Phi_1).$$

Если такое q существует, то заменяя в нем одно-однозначно символы из C', не входящие в C, на символы из C, не входящие в q и Φ_1, найдем $q_1 \supseteq p$, что $q_1 \Vdash \Phi_1$, а все форсинговые символы q_1 лежат в C.

Лемма 7. *Пусть* $\langle c_1, \ldots, c_s\rangle$ — *последовательность попарно различных форсинговых символов, а* $\langle t_1, \ldots, t_s\rangle$ — *последовательность замкнутых термов расширенной сигнатуры. Пусть* Φ' *получается из* Φ *заменой* $c_1, \ldots, c_s$ *на* $t_1, \ldots, t_s$. *Пусть*

$$q = p \cup \{c_1 = t_1, \ldots, c_s = t_s\}$$

— *условие. Тогда*

$$(q \Vdash \Box\Phi) \Leftrightarrow (q \Vdash \Box\Phi').$$

Доказательство. Пусть Φ — атомная. Если, например, $q \Vdash \neg\Phi$ и $q_1 \supseteq q$, $q_1 \Vdash \Phi'$, то $\Phi' \in q_1$. Но тогда $q_1 \cup \{\Phi\}$ — тоже условие и $q_1 \cup \{\Phi\} \Vdash \Phi$. Противоречие.

Если лемма верна для Φ_1, Φ_2, то она верна и для $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \wedge \Phi_2$. Например, пусть $q \Vdash \neg(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $q_1 \supseteq q$, $q_1 \Vdash (\Phi_1 \wedge \Phi_2)'$. Тогда $q_1 \Vdash \Phi_1'$ и $q_1 \Vdash \Phi_2'$. Пусть $q_2 \supseteq q_1$ и $q_2 \Vdash \Phi_2$. Тогда никакое расширение q_2 не форсирует Φ_1. Значит, $q_2 \Vdash \neg\Phi_1$ и $q_2 \Vdash \neg\Phi_1'$. Противоречие. Значит, $q_1 \Vdash \neg\Phi_2$ и $q_1 \Vdash \neg\Phi_2'$. Опять противоречие. Здесь и далее через $\Psi'(\Phi_j')$ мы обозначаем формулу, которая получается из $\Psi(\Phi_j)$ заменой $c_1, \ldots, c_s$ на $t_1, \ldots, t_s$.

Пусть лемма верна для $(\Phi_1)^{x_i}_t$ при любом замкнутом терме t расширенной сигнатуры. Пусть $q \Vdash \neg(\exists x_i)\Phi_1$, $q_1 \supseteq q$, $q_1 \Vdash ((\exists x_i)\Phi_1)'$. Тогда $q_1 \Vdash (\Phi_1')^{x_i}_t$ для некоторого замкнутого терма t расширенной сигнатуры. Пусть $q_2 \supseteq q_1$, $q_2 \Vdash (\Phi_1)^{x_i}_t$. Тогда $q_2 \Vdash (\exists x_i)\Phi_1$. Противоречие. Значит, $q_1 \Vdash \neg(\Phi_1')^{x_i}_{t_1}$ для любого замкнутого терма t_1 расширенной сигнатуры. Выберем t_1 так, чтобы t_1 не содержал $c_1, \ldots, c_s$ и чтобы t получался из t_1 заменой $c_{l+1}, \ldots, c_{l+s}$ на $c_1, \ldots, c_s$, а $c_{l+1}, \ldots, c_{l+s}$ не встречались в q_1 и Φ_1'. Пусть

$$q_3 = q_1 \cup \{c_{l+1} = c_1, \ldots, c_{l+s} = c_s\}.$$

Тогда $q_3 \Vdash \neg(\Phi_1')^{x_i}_t$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда $q \Vdash \neg((\exists x_i)\Phi_1)'$. Значит, лемма верна и для $(\exists x_i)\Phi_1$.

Пусть лемма верна для Φ_1 и $q \Vdash \neg\neg\Phi_1$. Тогда, если $q_1 \supseteq q$ и $q_1 \Vdash \neg\Phi_1'$, то $q_1 \Vdash \neg\Phi_1$. Противоречие. Если же $q \Vdash \neg\neg\Phi_1'$ и $q_1 \supseteq q$, $q_1 \Vdash \neg\Phi_1$, то $q_1 \Vdash \neg\Phi_1'$. Опять противоречие.

Лемма 8. *Если G является генерической при одной нумерации, то G является генерической и при другой нумерации.*

Доказательство. Пусть G — генерическая при нумерации τ_1, а τ_2 — другая нумерация. Соответствующие расширения сигнатуры обозначим через Ω_1 и Ω_2. Можно считать, что множества форсинговых символов нумераций τ_1 и τ_2 не пересекаются. Пусть Φ — замкнутая формула сигнатуры Ω_2, в которой встречаются форсинговые символы $c_1, \ldots, c_s$, и пусть $c_1 = t_1, \ldots, c_s = t_s$, где $t_1, \ldots, t_s$ — замкнутые термы сигнатуры Ω_1, а равенства имеются в виду в обогащении G при помощи объединения τ_1 и τ_2. Пусть Φ ложна в обогащении G при помощи τ_2. Существует $p_1 \subseteq D_{\tau_1}(G)$, что $p_1 \Vdash \neg\Phi'$, где Φ' получается из Φ заменой $c_1, \ldots, c_s$ на $t_1, \ldots, t_s$. Тогда

$$p_1 \cup \{c_1 = t_1, \ldots, c_s = t_s\} \Vdash \neg\Phi.$$

Пусть q — конечная совокупность замкнутых базисных формул сигнатуры Ω_2, являющаяся условием; $c_1^1, \ldots, c_k^1$ — форсинговые символы, встречающиеся в p_1 или в $t_1, \ldots, t_s$; $t_1^1, \ldots, t_k^1$ — замкнутые термы сигнатуры Ω_2; $c_1^1 = t_k^1, \ldots, c_k^1 = t_k^1$ в созданном $\tau_1 \cup \tau_2$ обогащении G;

$$p_2 = p_1^* \cup \{c_1 = t_1^*, \ldots, c_s = t_s^*\}, \quad q \supseteq p_2 \quad \text{и} \quad q \Vdash \neg\neg\Phi,$$

где p_1^* и $t_1^*, \ldots, t_s^*$ получаются из p_1 и $t_1, \ldots, t_s$ заменой $c_1^1, \ldots, c_k^1$ на $t_1^1, \ldots, t_k^1$. Тогда $q_1 = q \cup \{c_1 = t_1, \ldots, c_s = t_s\}$ — тоже условие. Значит, $q_1 \Vdash \neg\neg\Phi'$, где Φ' получается из Φ заменой $c_1, \ldots, c_s$ на $t_1, \ldots, t_s$. Ясно, что $q_1 \cup p_1$ — условие и $q_1 \cup p_1$ форсирует как $\neg\Phi'$, так и $\neg\neg\Phi'$. Противоречие. Поэтому никакое расширение условия p_2 не форсирует $\neg\neg\Phi$ и, значит, не форсирует Φ. Отсюда $p_2 \Vdash \neg\Phi$. Ясно также, что $p_2 \subseteq D\tau_2(G)$.

Итак, если Φ ложна в обогащении G, то найдется $p_2 \subseteq D_{\tau_2}(G)$, что $p_2 \Vdash \neg\Phi$. Теперь дословно повторяя начало доказательство леммы 3, а), получаем, что G — генерическая при нумерации τ_2.

Далее предполагаем, что множество C счетно. У нас имеется эффективная нумерация формул расширенной сигнатуры, которую мы продолжаем до нумерации всех конечных множеств замкнутых базисных формул. Именно, множеству $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ с попарно различными $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ присваиваем номер $2^{l_1} + \ldots + 2^{l_n}$, где $l_1, \ldots, l_n$ — номера формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Далее продолжаем нумерацию на множество упорядоченных пар вида $\langle p, \Phi\rangle$, где p — конечное множество замкнутых базисных формул расширенной сигнатуры, Φ — замкнутая формула расширенной сигнатуры. Номером этой пары называем натуральное число $2^4 \cdot 3^{l_1} \cdot 5^{l_2}$, где l_1 — номер p, а l_2 — номер Φ.

Л е м м а 9. *Пусть сигнатура Ω конечна.*

Тогда

а) *для каждой замкнутой формулы Φ расширенной сигнатуры можно эффективно написать такую формулу арифметики $\alpha_\Phi(x_1; R^{(1)})$, что α_Φ определяет множество номеров условий для теории T, форсирующих Φ, если R определяет множество номеров формул из теории T сигнатуры Ω;*

б) *если теория T сигнатуры Ω имеет арифметическое множество номеров формул из T, то множество номеров всех пар $\langle p, \Phi\rangle$, где Φ — замкнутая формула расширенной сигнатуры, а p — условие, форсирующее Φ, является рекурсивным относительно $\varnothing^{(\omega)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Сначала докажем существование формулы $\varphi(x_1; R^{(1)})$, определяющей множество номеров условий теории T, если R определяет множество номеров формул теории T. В самом деле, формула φ утверждает, что x_1 — номер конечного множества базисных формул и для всяких $y_1, \ldots, y_n$ из R множество формул с номерами $y_1, \ldots, y_n$ в объединении с множеством номера x_1 непротиворечиво. α_Φ теперь строим индукцией по Φ. Если Φ — атомная, то $\alpha_\Phi(x_1; R)$ утверждает, что условие с номером x_1 содержит формулу Φ. Если α_{Φ_1} и α_{Φ_2} уже построены, то $\alpha_{\Phi_1 \vee \Phi_2}$ есть $\alpha_{\Phi_1} \bigvee \alpha_{\Phi_2}$, $\alpha_{\Phi_1 \wedge \Phi_2}$ есть $\alpha_{\Phi_1} \bigwedge \alpha_{\Phi_2}$, а $\alpha_{(\exists x_i)\Phi_1}$ есть утверждение, эквивалентное дизъюнкции формул $\alpha_{(\Phi_1)_t^{x_i}}$ по всем замкнутым термам t расширенной сигнатуры, $\alpha_{\neg\Phi_1}$ есть утверждение «для каждого x, если $\varphi(x; R)$ и условие с номером x содержит условие с номером x_1, то $\neg\alpha_{\Phi_1}(x; R)$».

б) Для произвольной пары $\langle p, \Phi\rangle$, где Φ — замкнутая формула расширенной сигнатуры и p — конечное множество замкнутых базисных формул этой сигнатуры, вопрос о том, является ли p условием, форсирующим Φ, по доказательству а) эффективно сводится к вопросу о том, истинно ли в арифметике $\beta_\Phi(a)$, где $\beta_\Phi(x_1)$ получается из $\alpha_\Phi(x_1; R)$ заменой символа R на формулу, определяющую множество номеров формул из T, а a — номер множества p, другими словами, к вопросу о том, принадлежит ли номер условия p множеству, определяемому формулой β_Φ. По этой формуле эффективно находится некоторое натуральное m и, например, Σ_m — индекс множества, определяемого этой формулой. По индексу эффективно строится алгоритм с оракулом, который для оракула $\varnothing^{(\omega)}$ вычисляет характеристическую функцию множества, определяемого формулой β_Φ.

§ 3. Богатые теории

Через $Э(T)$ обозначим класс экзистенциально замкнутых в теории T систем.

Теорию T конечной сигнатуры назовем почти богатой, если существует такая формула $\theta^T(x, y, u)$ этой сигнатуры, что

а) T имеет модели и является арифметической совокупностью формул, а $Э(T)$ состоит только из бесконечных систем;

б) для каждой $A \in Э(T)$ и каждого конечного $H \subseteq |A|^2$ найдется такой набор $c \in |A|$, что

$$(1) \qquad H = \{\langle a, b\rangle \in |A|^2 \mid \theta^T(a, b, c) \text{ истинно в } A\};$$

в) для каждой $A \in Э(T)$ и каждого набора $c \in |A|$ множество, стоящее в правой части равенства (1), конечно.

Как обычно, под u мы здесь понимаем конечную последовательность символов предметных переменных. Запись $\theta(x, y, u)$ означает, что в θ нет свободных вхождений переменных, отличных от x, y, и символов из последовательности u. «$\theta(a, b, c)$ истинно в A» — это сокращение фразы «$\theta(x, y, u)$ истинно в A, когда x и y принимают значения a и b, $u = \langle u_1, \ldots, u_s\rangle$, $c = \langle c_1, \ldots, c_s\rangle$ и $u_1, \ldots, u_s$ принимают значения $c_1, \ldots, c_s$». «$c \in |A|$» используется как сокращение для «каждый элемент последовательности c является элементом $|A|$».

Через $M(T)$ обозначим класс всех систем, которые являются подсистемами моделей теории T, а через $M_n(T)$ — класс всех n-порожденных систем из $M(T)$. Если $A \in M_n(T)$, мы будем рассматривать обогащение A, добавляя к A в качестве выделенных элементов все элементы некоторого n-элементного множества, порождающего A. Если $a_1, \ldots, a_n$ — новые выделенные элементы, то это обогащение обозначим через $(A; a_1, \ldots, a_n)$. Из одной A, вообще говоря, можно получить таким образом различные обогащения, и через $M'_n(T)$ мы обозначим класс всех таких обогащений систем из $M_n(T)$. Сигнатура класса $M'_n(T)$ получается из первоначальной сигнатуры Ω добавлением n нульместных символов операций $d_1, \ldots, d_n$. Новую сигнатуру обозначим через Ω_n.

Скажем, что подкласс K класса $M^k_n(T)$ элементарно определим (определим формулой типа j) в классе $L \subseteq M(T)$, если существует такая формула (формула типа j) $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой $B \in L$ и каждых $a_1, \ldots, a_n \in B$, порождающих подсистему A системы B, $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в B тогда и только тогда, когда $A \in K$ или $(A; a_1, \ldots, a_n) \in K$. Скажем, что эта $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ определяет K в L. В этом определении либо $k = 0$, и тогда $M^k_n(T)$ есть $M_n(T)$, либо $k = 1$, и тогда $M^k_n(T)$ есть $M'_n(T)$.

Теорема 1. *Пусть T — почти богатая теория.*

а) *Для любой формулы типа* III Φ, *не имеющей свободных вхождений символов из последовательности* (2) § 1, *найдется формула* Ψ *логики предикатов первого порядка с теми же свободно входящими символами предметных переменных, что и у* Φ, *что для любой системы* A *из* $Э(T)$ *при любых значениях свободных переменных истинность* Φ *в* A *совпадает с истинностью* Ψ.

б) *Подкласс* K *класса* $M'_n(T)$ *элементарно определим в классе* $Э(T)$ *тогда и только тогда, когда существует такая замкнутая формула типа* III *сигнатуры* Ω_n, *что к* K *принадлежат те и только те системы из* $M'_n(T)$, *в которых эта формула истинна.*

в) *Подкласс* K *класса* $M_n(T)$ *элементарно определим в классе* $Э(T)$ *тогда и только тогда, когда существует такая замкнутая формула типа* III *сигнатуры* Ω, *что к* K *принадлежат те и только те системы из* $M(T)$, *в которых эта формула истинна.*

г) *Подкласс K класса $M_n^k(T)$ элементарно определим в классе $Э(T)$ тогда и только тогда, когда K определим формулой типа* III *в $M(T)$, где либо $k = 0$, либо $k = 1$.*

Доказательство. а) Чтобы получить формулу Ψ из формулы Φ, достаточно, очевидно, Φ заменить сначала на эквивалентную формулу типа I Φ_1, а потом в Φ_1 каждое вхождение $H_i(t_1, t_2)$ заменить на вхождение $\theta^T(t_1, t_2, u^i)$, $(\exists H_i)$ заменить на $(\exists u^i)$ и $(\forall H_i)$ заменить на $(\forall u^i)$, где последовательности символов переменных u^i подобраны попарно не пересекающимися и не имеющими общих символов с Φ_1, а «$(\exists u^i)$» или «$(\forall u^i)$» означает «$(\exists u_1^i) \ldots (\exists u_s^i)$» или, соответственно, «$(\forall u_1^i) \ldots (\forall u)_s^i$», если $u = \langle u_1^i, \ldots, u_s^i \rangle$.

в) и г) легко следуют из б). Например, если $K \subseteq M_n(T)$ элементарно определим в $Э(T)$ формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, то пусть

$$K_1 = \{(A;\ a_1, \ldots, a_n) \mid B \in Э(T);\ a_1, \ldots, a_n \text{ порождают } A \text{ в } B;\ \Phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ истинно в } B\}.$$

Тогда $K_1 \subseteq M_n'(T)$ и K_1 элементарно определяется $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ в $Э(T)$. Пусть $\Psi(d_1, \ldots, d_n)$ — формула типа III, существование которой утверждается в б). Пусть $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула типа III сигнатуры Ω и $\Psi(d_1, \ldots, d_n)$ получается из $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ заменой $x_1, \ldots, x_n$ на $d_1, \ldots, d_n$. Пусть $\Theta(y, x_1, \ldots, x_n)$ — формула типа II сигнатуры Ω, утверждающая, что y есть терм сигнатуры Ω, переменные которого содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$, а $\Theta_1(y, x_1, \ldots, x_n)$ — эквивалентная формула типа III. Специализируя в $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ кванторы по предметным переменным по формуле $\Theta_1(\cdot, x_1, \ldots, x_n)$, а подформулы $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ вида $(\exists Q_i)\Psi_1$ и $(\forall Q_i)\Psi_1$, заменяя, соответственно, на $(\exists Q_i)(\gamma(Q_i) \wedge \Psi_1)$ и $(\forall Q_i)(\gamma(Q_i) \to \Psi_1)$, где $\gamma(Q_1)$ есть

$$(\exists Q_2)(Q_1 \subseteq Q_2 \wedge (\forall Q_3)(\forall Q_4)((Q_2(Q_3) \wedge Q_3(Q_4)) \to \to Q_2(Q_4)) \wedge (\forall x_{n+1})(Q_2(x_{n+1}) \to \Theta_1(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n))),$$

получим формулу типа III $\Theta_2(x_1, \ldots, x_n)$, которая утверждает, что в подсистеме, порожденной $x_1, \ldots, x_n$, истинна $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$. Теперь формула $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\forall y)(\Psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \Theta_1(y, x_1, \ldots, x_n))$ годится в качестве формулы типа III, существование которой утверждается в в). При этом формула типа III $\Theta_2(x_1, \ldots, x_n)$ определяет K в $M(T)$.

Докажем б). Достаточно, в силу а), только показать, что если K определяется в $Э(T)$ формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, то существует формула типа III сигнатуры Ω_n, замкнутая и такая, что к K принадлежат те и только те системы из $M_n'(T)$, в которых эта формула истинна.

Пусть $A' = (A;\ a_1, \ldots, a_n) \in M_n'(T)$. Через $\Delta(A')$ обозначим совокупность всех замкнутых базисных формул сигнатуры Ω_n, истинных в A'. Рассмотрим теорию $T \cup \Delta(A')$. Пусть G является $(T \cup \Delta(A'))$-генерической системой. Можно считать, что $d_1, \ldots, d_n$ интерпретируются в G как $a_1, \ldots, a_n$ и порождают в G подсистему A. По определению, $A' \in K$ влечет, что в G истинна $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$ и, значит, существует условие $p \subseteq D(G)$, что

$$p \Vdash_{T \cup \Delta(A')} \Phi(d_1, \ldots, d_n).$$

Наоборот, если существует $(T \cup \Delta(A'))$-условие p, форсирующее в $T \cup \Delta(A')$ формулу $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$, то по лемме 2 § 2 существует такая $(T \cup \Delta(A'))$-генерическая система G, что $p \subseteq D_\tau(G)$ для некоторой нумерации τ системы G. Значит, в G истинна $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$, а тогда $A' \in K$. Итак,

$$(2)\quad A' \in K \Longleftrightarrow (\text{существует такое условие } p, \text{ что } p \Vdash_{T \cup \Delta(A')} \Phi(d_1, \ldots, d_n)).$$

Осталось заметить, что правая часть (2) равносильна истинности в A' некоторой замкнутой формулы типа III сигнатуры Ω_n. Пусть $\alpha(x_1;\ R^{(1)})$ — формула арифметики, определяющая множество номеров условий, форсирующих $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$ в теории сигнатуры Ω_n, множество номеров формул которой определяется R (см. лемму 9 § 2). Легко построить формулу типа III $\Theta(Q_1;\ d_1, \ldots, d_n)$, которая в A' определяет множество номеров формул из $T \cup \Delta(A')$. Если $\Theta'(Q_1)$ — формула типа III, определяющая множество номеров формул из T, $\Theta^T(Q_1, Q_2)$ — формула типа III из леммы 6 § 1, то $\Theta(Q_1;\ d_1, \ldots, d_n)$ есть

$$\Theta'(Q_1) \vee (\Theta^0(Q_1, \varnothing) \wedge Q_1 \text{ — номер базисной формулы}).$$

Рассматривая формулу типа IV $\alpha^*(Q_1;\ R)$, полученную из $\alpha(x_1;\ R)$ по лемме 3 § 1, и заменяя в ней вхождения $R(Q_i)$ на вхождения $\Theta(Q_i;\ d_1, \ldots, d_n)$, получим формулу типа III $\Theta_1(Q_1;\ d_1, \ldots, d_n)$, которая в A' определяет множество номеров условий, форсирующих $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$ в $T \cup \Delta(A')$. Навешивая на Q_1 квантор существования, получим искомую формулу.

Теорема 2. *Пусть T — почти богатая теория сигнатуры Ω.*

а) *Никакой подкласс K класса $Э(T)$ не является аксиоматизируемым, т. е. не существует такого множества Σ замкнутых формул сигнатуры Ω, что в K входят те и только те системы сигнатуры Ω, в которых истинны все формулы из Σ.*

б) *Класс T-генерических систем аксиоматизируем в классе $Э(T)$, т. е. существует такое множество Σ замкнутых формул сигнатуры Ω, что экзистенциально замкнутая в T система является T-генерической тогда и только тогда, когда в ней истинны все формулы из Σ. В частности, система из $Э(T)$, элементарно эквивалентная T-генерической, сама является T-генерической.*

Доказательство. а) Для любой $A \in Э(T)$ легко построить, пользуясь теоремой компактности, элементарное расширение, в котором для некоторого набора c существует бесконечно много пар $\langle a, b\rangle$ таких, что $\theta^T(a, b, c)$ истинно. По определению почти богатой теории такое элементарное расширение системы A не является экзистенциально замкнутой в T системой.

б) Для произвольной формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Ω найдем такую формулу типа III $\Theta_\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, что Θ_Φ истинна в системе A для $a_1, \ldots, a_n$ из $|A|$ тогда и только тогда, когда найдутся условие p и $a_{n+1}, \ldots, a_{n+s}$ из $|A|$ такие, что $p \Vdash \Phi(c_1, \ldots, c_n)$, встречающиеся в p форсинговые символы содержатся среди $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+s}$ и все формулы из p истинны в A, когда значение c_i есть a_i для $i = 1, \ldots, n+s$. Такая Θ_Φ по теореме 1 эквивалентна в классе $Э(T)$ некоторой элементарной формуле. Легко видеть, что G из $Э(T)$ является T-генерической тогда и только тогда, когда

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \Theta_\Phi(x_1, \ldots, x_n))$$

истинно в G для всякой формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Ω. Для доказательства достаточно рассмотреть такую нумерацию G, при которой каждый элемент имеет бесконечно много прообразов. Формула типа III $\Theta_\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ есть дизъюнкция формул

$$(\exists x_{n+1}) \ldots (\exists x_{n+s})\, p_1'$$

по всем таким условиям p, что $p \Vdash \Phi(c_1, \ldots, c_n)$ и встречающиеся в p форсинговые символы содержатся среди $c_1, \ldots, c_{n+s}$, а p' получается из p заменой $c_1, \ldots, c_{n+s}$ на $x_1, \ldots, x_{n+s}$ (см. лемму 9 § 2), p_1' — конъюнкция всех формул из p'.

Пусть $(A;\ a_1, \ldots, a_n) \in M_n'(T)$. Совокупность номеров всех базисных формул сигнатуры Ω_n, истинных в $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$, будем называть проблемой равенства для $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$. Скажем, что множество X некоторых натуральных чисел рекурсивно выделяется в своем надмножестве Y, тоже состоящем из натуральных чисел, если существует такое рекурсивное множество Z, что $Y \cap Z = X$.

Теорема 3. *Пусть T — почти богатая теория.*

а) *Если $A' \in M'_n(T)$ и A' имеет арифметическую проблему равенства, то класс всех систем, изоморфных A', элементарно определим в $Э(T)$.*

б) *Если проблема равенства для A' из $M'_n(T)$ является арифметической относительно некоторого своего подмножества X, которое неявно определимо в арифметике и рекурсивно выделимо в проблеме равенства для A', то класс всех систем, изоморфных A', элементарно определим в $Э(T)$.*

Доказательство. а) следует из б) и само по себе тривиально, так как в качестве формулы, определяющий класс систем, изоморфных A', можно взять конъюнкцию всех таких базисных формул $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Ω, что $\Phi(d_1, \ldots, d_n)$ истинна в A'.

б) Пусть Y — рекурсивное множество, которое в пересечении с проблемой равенства для A' дает X. Пусть $\varphi_2(x_1)$ — формула арифметики, определяющая Y, а $\varphi_1(R)$ — формула арифметики, которая неявно определяет X. Пусть проблема равенства для A' определяется относительно X формулой арифметики $\varphi_3(x_1; R)$. Пусть, наконец, $\Theta(Q_1; x_1, \ldots, x_n)$ — формула типа III, истинная в алгебраических системах B нашей сигнатуры для Q', $b_1, \ldots, b_n$ тогда и только тогда, когда Q' — натуральное число из проблемы равенства для $(B'; b_1, \ldots, b_n)$, где B' порождается в B элементами $b_1, \ldots, b_n$. Применяя лемму 3 § 1 к формулам φ_1, φ_2, φ_3, получаем формулы типа IV $\varphi_1^*(R)$, $\varphi_2^*(Q_1)$, $\varphi_3^*(Q_1; R)$.

Все вхождения подформул $R(Q_i)$ в φ_1^* заменим на вхождения

$$\Theta(Q_i; x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi_2^*(Q_i).$$

Получим формулу типа III $\Theta_1(x_1, \ldots, x_n)$, истинную в B для $b_1, \ldots, b_n \in$ $\in |B|$ тогда и только тогда, когда проблема равенства для $(B'; b_1, \ldots, b_n)$ в пересечении с Y дает X.

Пусть $\Theta_2(Q_1; x_1, \ldots, x_n)$ есть $\Theta(Q_1; x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi_2^*(Q_1)$. Ясно, что Θ_2 истинна в B для Q', $b_1, \ldots, b_n$, для которых проблема равенства для $(B'; b_1, \ldots, b_n)$ в пересечении с Y дает X, тогда и только тогда, когда $Q' \in X$.

Заменим в $\varphi_3^*(Q_1; R)$ все вхождения подформул $R(Q_i)$ на формулы типа III $\Theta_2(Q_i; x_1, \ldots, x_n)$. Получим формулу типа III $\Theta_3(Q_1; x_1, \ldots, x_n)$, истинную в B для Q', $b_1, \ldots, b_n$, для которых проблема равенства для $(B'; b_1, \ldots, b_n)$ в пересечении с Y дает X, тогда и только тогда, когда Q' принадлежит проблеме равенства для A'. Искомая формула типа III теперь, очевидно, есть

$$\Theta_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall Q_1)(\Theta(Q_1; x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Theta_3(Q_1; x_1, \ldots, x_n)).$$

Напомним, что элементарной теорией класса алгебраических систем одной сигнатуры называется совокупность номеров всех замкнутых формул этой сигнатуры, истинных во всех системах этого класса.

Теорема 4. *Пусть T — почти богатая теория. Тогда*

а) *элементарная теория класса $Э(T)$ является Π_1^1-множеством;*

б) *если класс систем, изоморфных A' из $M'_n(T)$, элементарно определим в классе $Э(T)$, то проблема равенства для A' является гиперарифметической.*

Доказательство. а) Пусть T_1 — элементарная теория класса $Э(T)$, а Σ — множество замкнутых формул нашей сигнатуры, истинных в некоторой системе из $Э(T)$. Достаточно показать, что множество Σ^* номеров всех формул Σ есть Σ_1^1-множество. Для этого по произвольной замкнутой формуле Φ нашей сигнатуры надо эффективно написать формулу арифметики $\alpha_\Phi(f_1, \ldots, f_k; P_1, \ldots, P_l)$, которая утверждает, что $f_1, \ldots, f_k, P_1, \ldots$ $\ldots, P_l$ определяют на натуральных числах алгебраическую систему нашей сигнатуры, в которой истинна формула Φ и которая является экзистенциально замкнутой в теории T. Здесь $\langle f_1, \ldots, f_k; P_1, \ldots, P_l\rangle$ — это наша сигнатура.

То, что алгебраическая система A является экзистенциально замкнутой в T, означает, что множество формул $T \cup D(A)$ непротиворечиво и из него выводима любая замкнутая Π_1-формула сигнатуры Ω_A, истинная в $(A; a)_{a \in |A|}$. Здесь Ω_A обозначает обогащение нашей сигнатуры нульместными символами операций c_a для каждого $a \in |A|$, $(A; a)_{a \in |A|}$ — это соответствующее обогащение A, в котором c_a интерпретируется как a для $a \in |A|$, $D(A)$ — это множество всех замкнутых базисных формул сигнатуры Ω_A, истинных в $(A; a)_{a \in |A|}$.

Так как элементарная подсистема системы из $\text{Э}(T)$ снова лежит в $\text{Э}(T)$, то из $\Phi \in \Sigma$ следует, что Φ истинна в некоторой счетной системе из $\text{Э}(T)$. Значит, $\Phi \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда в арифметике истинна

$$(\exists f_1) \ldots (\exists f_k)(\exists P_1) \ldots (\exists P_l)\alpha_\Phi.$$

Отсюда следует, что Σ^* является Σ^1_1-множеством.

б) Пусть класс систем, изоморфных $A' \in M'_n(T)$, элементарно определим в $\text{Э}(T)$ формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда для каждой базисной формулы $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ нашей сигнатуры тогда и только тогда $\alpha(d_1, \ldots, d_n)$ истинна в A', когда

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \alpha(x_1, \ldots, x_n))$$

лежит в T_1, и тогда и только тогда, когда

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \alpha(x_1, \ldots, x_n))$$

лежит в Σ. Следовательно, проблема равенства для A' является одновременно как Σ^1_1-множеством, так и Π^1_1-множеством, значит, является гиперарифметическим множеством.

Напомним, что рекурсивной перестановкой N называют общерекурсивную функцию, одно-однозначно отображающую N на N. Если f — рекурсивная перестановка N, $A \subseteq N$ и $B = f(A)$, то говорят, что A и B рекурсивно изоморфны.

Теорема 5. *Пусть T — почти богатая теория и для произвольного множества X нечетных натуральных чисел существуют натуральное n и $A' \in M'_n(T)$, что проблема равенства для A' содержит множество Y, рекурсивно изоморфное X, Y рекурсивно выделяется в проблеме равенства для A' и эта проблема равенства является арифметической относительно Y. Тогда*

а) для каждого гиперарифметического множества X найдутся натуральное n и $A' \in M'_n(T)$ такие, что X рекурсивно относительно проблемы равенства для A', а класс систем, изоморфных A', элементарно определим в классе $\text{Э}(T)$;

б) элементарная теория класса $\text{Э}(T)$ не является гиперарифметическим множеством и, значит, является Π^1_1-, но не Σ^1_1-множеством.

Доказательство. а) сразу следует из теоремы 3. При этом надо использовать два факта. Во-первых, для любого гиперарифметического множества X существует неявно определимое в арифметике множество Y, в котором X рекурсивно, но Y не является рекурсивным в X. Во-вторых, множество, рекурсивно изоморфное неявно определимому в арифметике, само неявно определимо в арифметике.

б) Если класс систем, изоморфных $A' \in M'_n(T)$, элементарно определим в $\text{Э}(T)$, то проблема равенства для A' сводится к элементарной теории класса $\text{Э}(T)$. Из этого и а) следует, что элементарная теория класса $\text{Э}(T)$ не является гиперарифметической.

Теорема 6. *Пусть T — такая почти богатая рекурсивно перечислимая теория со свойством совместного вложения, что существует замкнутая Σ_1-формула Φ нашей сигнатуры, совместная с T и такая, что для любого* *натурального n и любой $A' \in M'_n(T)$ из того, что Φ истинна в A', следует, что проблема равенства для A' не является рекурсивной. Тогда существуют такое натуральное n и такая $A' \in M'_n(T)$, что проблема равенства для A' является гиперарифметической, но класс систем, изоморфных A', не является элементарно определимым в $Э(T)$.*

Доказательство. По лемме 9 § 2 можем, как в лемме 2 § 2, построить T-генерическую систему G так, что полученное при построении множество p_∞ будет рекурсивным относительно $\varnothing^{(\omega)}$. Так как G экзистенциально замкнута в T, а T имеет свойство совместного вложения, формула Φ истинна в G. Можем найти конечно порожденную подсистему A системы G, в которой Φ тоже истинна. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ порождают A в G. Тогда проблема равенства для $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$ не является рекурсивной и, по следствию из леммы 4 § 2, можем найти T-генерическую систему, в которую A не вкладывается изоморфно. С другой стороны, проблема равенства для $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$ рекурсивна относительно $\varnothing^{(\omega)}$ и, значит, гиперарифметическая. Если бы класс систем, изоморфных $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$, был элементарно определим в $Э(T)$, мы получили бы противоречие с тем, что любые две T-генерические системы элементарно эквивалентны.

Теорема 7. *Пусть $\{\rho_i \mid i \in I_1\}$ и $\{\sigma_i \mid i \in I_1\}$ — такие две счетные совокупности тьюринговых степеней, что для каждых попарно различных $i, i_1, \ldots, i_m \in I_1$ верно, что $\rho_i \leqslant \sigma_i$, и не верно, что*

$$\rho_i \leqslant \sigma_{i_1} \cup \ldots \cup \sigma_{i_m}.$$

Пусть T — такая почти богатая рекурсивно перечислимая теория со свойством совместного вложения, что для каждого $i \in I_1$ существуют натуральное n_i и $A'_i \in M'_{n_i}(T)$, что проблема равенства для A'_i имеет тьюрингову степень, лежащую между ρ_i и σ_i, а класс систем, изоморфных A'_i, элементарно определим в $Э(T)$. Тогда существует такое множество континуальной мощности экзистенциально замкнутых в T систем, любые две системы из которого не являются элементарно эквивалентными.

Доказательство. Будем придерживаться обозначений из § 2, введенных там перед леммой 4.

Сначала для каждого $I \subseteq I_1$ построим такую T^*-генерическую систему G_I, в которую A_i не вкладывается изоморфно для каждого $i \in I_1 - I$. Пусть $\Phi_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ определяет A'_i в $Э(T)$ и пусть I и I' — два подмножества I_1, $i \in I$ и $i \notin I'$, Тогда в G_I истинна

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_{n_i}) \Phi_i(x_1, \ldots, x_{n_i}),$$

но эта же формула ложна в $G_{I'}$.

Пусть $i \in I_1 - I$. По лемме 4 § 2 достаточно только проверить, что для любого условия p для теории T^* и любых замкнутых термов $t_1, \ldots, t_{n_i}$ расширенной сигнатуры найдется такая $\Phi \in \Delta(A'_i)$, что $T^* \cup p$ совместно с $\neg\Phi'$, где Φ' получается из Φ заменой $d^i_1, \ldots, d^i_{n_i}$ на $t_1, \ldots, t_{n_i}$. Если это не так, то рассмотрим те $k \in I$, что d^k_j встречается в p или $t_1, \ldots, t_{n_i}$. Пусть эти k есть $i_1, \ldots, i_m$. Если $\Phi \in \Delta(A'_i)$ и $\neg\Phi'$ совместна с

$$T^1 = T \cup \Delta(A'_{i_1}) \cup \ldots \cup (A'_{i_m}) \cup p,$$

то $\neg\Phi'$ совместна и с $T^* \cup p$. В самом деле, если B' — модель $T^1 \cup \{\neg\Phi'\}$, а B'_1 — модель T и $\Delta(A'_j)$ для каждого $j \in I - \{i_1, \ldots, i_m\}$, то, обозначив через B и B_1 обеднения систем B' и B'_1 до систем первоначальной сигнатуры, мы можем найти модель B_2 теории T, в которую B и B_1 изоморфно вкладываются. Припишем теперь символам d^k_j и форсинговым символам из p и Φ' в качестве значений в B_2 образы при изоморфном вложении B в B_2 значений этих символов в B' (здесь $k \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, а $j = 1, \ldots, n_k$). Символам d_j^l при $l \in I - \{i_1, \ldots, i_m\}$ $(j = 1, \ldots, n_l)$ припишем в качестве значений в B_2 образы при изоморфном вложении B_1 в B_2 значений этих символов в B_1'. В результате получим такое обогащение B_2, которое является моделью $T^* \cup p \cup \{\neg\Phi'\}$, а это противоречит сделанному допущению. Итак, из T^1 выводимы все формулы Φ' для $\Phi \in \Delta(A_i')$. Но множество всех формул, выводимых из T^1, рекурсивно перечислимо относительно $\Delta(A'_{i_1}) \cup \ldots \cup \Delta(A'_{i_m})$. Повторяя рассуждения из следствия леммы 4 § 2, получим, что проблема равенства для $\Delta(A_i')$ сводится по Тьюрингу к проблемам равенства для $\Delta(A'_{i_1}), \ldots, \Delta(A'_{i_m})$. Если тьюринговы степени проблем равенства для $\Delta(A_i')$, $\Delta(A'_{i_1}), \ldots, \Delta(A'_{i_m})$ обозначить через $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_m$, то $\tau \leqslant \tau_1 \cup \ldots \cup \tau_m$. Так как $\rho_i \leqslant \tau \leqslant \sigma_i$ и $\rho_{i_j} \leqslant \tau_j \leqslant \sigma_{i_j}$ для $j = 1, \ldots, m$, то

$$\rho_i \leqslant \tau_1 \cup \ldots \cup \tau_m \leqslant \sigma_{i_1} \cup \ldots \cup \sigma_{i_m},$$

а это противоречит условию теоремы.

З а м е ч а н и е. Если дополнительно для каждого $i \in I_1$ класс систем, изоморфных A_i', определяется в классе $Э(T)$ Π_m-формулой, то G_I и $G_{I'}$ для различных подмножеств I и I' множества I_1 различаются Σ_{m+1}-формулой.

Мы закончим этот параграф, выделив в одном месте условия на теорию T, которые гарантируют, что для T выполняются заключения всех теорем 1—7.

Теорию T назовем богатой, если T — почти богатая рекурсивно перечислимая теория со свойством совместного вложения и

а) для каждого множества X нечетных натуральных чисел существуют натуральное n и $A' \in M_n'(T)$, что проблема равенства для A' содержит такое множество Y, рекурсивно изоморфное X, что Y рекурсивно выделяется в этой проблеме равенства и эта проблема равенства рекурсивна относительно Y';

б) существует совместная с T замкнутая Σ_1-формула Φ нашей сигнатуры, истинность которой в произвольной системе A' из $M_n'(T)$ влечет, что проблема равенства для A' не является рекурсивной.

Т е о р е м а 8. *Пусть T — богатая теория. Тогда*

а) *элементарная теория класса $Э(T)$ является Π_1^1-, но не Σ_1^1-множеством;*

б) *для каждого гиперарифметического множества X найдутся натуральное n и $A' \in M_n'(T)$ такие, что X рекурсивно относительно проблемы равенства для A', а класс систем, изоморфных A', элементарно определим в $Э(T)$;*

в) *существуют такие натуральное n и $A' \in M_n'(T)$, что проблема равенства для A' является гиперарифметической, но класс систем, изоморфных A', не является элементарно определимым в $Э(T)$;*

г) *существует такое множество континуальной мощности экзистенциально замкнутых в T систем, любые две системы из которого не являются элементарно эквивалентными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) и б) следуют из теоремы 5. Надо только заметить, что среди арифметических относительно Y содержатся все множества, рекурсивные относительно Y'. в) следует из теоремы 6.

Докажем г). Как замечено в § 0, существует такая счетная совокупность арифметических тьюринговых степеней $\{\tau_i \mid i \in I_1\}$, что для попарно различных $i, i_1, \ldots, i_m$ из I_1 степень τ_i не сводится по Тьюрингу к $\tau'_{i_1} \cup \ldots \cup \tau'_{i_m}$. Выберем для каждого $i \in I$ арифметическое множество X_i нечетных натуральных чисел, лежащее в степени τ_i. Найдем натуральное n и $A_i' \in M_n'(T)$, что проблема равенства для A_i' содержит такое Y_i, рекурсивно изоморфное X_i, для которого проблема равенства для A_i' рекурсивна относительно Y_i', а Y_i рекурсивно выделяется в проблеме равенства для A_i'. Так как тьюрингова степень Y_i тоже есть τ_i и Y_i тоже является арифметическим множеством, то проблема равенства для A'_i является арифметической и ее тьюрингова степень лежит между τ_i и τ'_i. Из теоремы 3, а) следует, что класс систем, изоморфных A'_i, элементарно определим в $Э(T)$. Теперь г) следует из теоремы 7.

Отметим еще другой способ доказательства теоремы 8, г), не использующий теоремы 7.

Разобьем класс K алгебраических систем одной сигнатуры на подклассы, относя к одному подклассу элементарно эквивалентные системы. Эти подклассы называются элементарными типами в K.

Теорема 9 (Дж. Гиршфельд [42]). *Пусть в классе $Э(T)$ для имеющей модели арифметической теории T имеется менее континуума элементарных типов. Тогда в $Э(T)$ число элементарных типов конечно или счетно, элементарная теория класса $Э(T)$ является гиперарифметической и элементарная теория каждой системы из $Э(T)$ тоже является гиперарифметической.*

Из теорем 8, а) и 9 следует теорема 8, г).

Из теоремы 2 следует, что не является почти богатой каждая теория T, для которой класс $Э(T)$ аксиоматизируем. Например, теории полей и абелевых групп не являются почти богатыми.

Совокупность T всех истинных в арифметике замкнутых Π_2-формул сигнатуры

$$\Omega = \langle 0,\ ',\ +,\ \cdot\rangle$$

доставляет пример почти богатой теории со свойством совместного вложения, не удовлетворяющей условиям а) и б) из определения богатой теории и не являющейся рекурсивно перечислимой. Поясним, как для этой T выбрать $\theta^T(x, y, u)$ из определения почти богатой теории. В [42] указана такая формула $\Phi_1(x)$ сигнатуры Ω, что для каждой $A \in Э(T)$

$$N = \{a \in |A| \mid \Phi_1(a) \text{ истинно в } A\}.$$

Из теоремы Ю. В. Матиясевича о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств следует существование Σ_1-формулы $\Psi(x, y, z)$ сигнатуры Ω, равносильной в арифметике «$K(x, y)$ определено и равно z», где $K(x, y)$ — универсальная функция Клини. Формулы

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z_1)(\forall z_2)((\Psi(x, y, z_1) \wedge \Psi(x, y, z_2)) \rightarrow z_1 = z_2),$$

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)(\exists x) ((\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \Psi(x, x_i, y_i))$$

истинны в любой системе из $Э(T)$. Значит, в качестве $\theta^T(x, y, u)$ годится формула

$$(\exists u_1)(\exists u_2)(\Phi_1(u_1) \wedge \Phi_1(u_2) \wedge u_1 + u_2 =$$
$$= u_3 \wedge \Phi_1(u_3) \wedge \Psi(u_4, u_1, x) \wedge \Psi(u_5, u_1, y)),$$
$$u = \langle u_3, u_4, u_5\rangle.$$

§ 4. Некоторые примеры богатых теорий

В этом и в следующих параграфах мы покажем, что многие естественные теории являются богатыми. Пока мы рассмотрим теории групп, групп без кручения, полугрупп, полугрупп без кручения, полугрупп с сокращением. Для проверки того, что эти теории являются почти богатыми, полезна будет следующая простая

Лемма 1. *Пусть T — такая имеющая модели арифметическая совокупность замкнутых формул одной конечной сигнатуры, что $Э(T)$ состоит только из бесконечных систем. Для того чтобы T была почти богатой теорией, необходимо и достаточно, чтобы существовали формулы $\Phi_1(x, z_1)$ и $\Phi_2(x, y, z_2)$, удовлетворяющие условиям:*

а) *для каждого натурального n и для каждой $A \in Э(T)$ найдется такой набор $c_1 \in |A|$, что множество всех $a \in |A|$, для которых в A истинно $\Phi_1(a, c_1)$, конечно и содержит более n элементов;*

б) *для любой $A \in Э(T)$ и любого набора $c_1 \in |A|$ множество*

$$\{a \in |A| \mid \Phi_1(a, c_1) \text{ истинно в } A\}$$

конечно;

в) *для каждой $A \in Э(T)$ и любой конечной функции $f \subseteq |A| \times |A|$ найдется такой набор $c_2 \in |A|$, что для всех a из области определения f и для всех $b \in |A|$ тогда и только тогда $\Phi_2(a, b, c_2)$ истинно в A, когда $f(a) = b$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что в качестве формулы $\theta^T(x, y, u)$ из определения почти богатой теории можно взять формулу

$$(\exists x_1)(\Phi_1(x_1, z_1) \wedge \Phi_2(x_1, x, z_2) \wedge \Phi_2(x_1, y, z_3)) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{j=2}^{3} (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)((\Phi_1(x_1, z_1) \wedge \bigwedge_{k=2}^{3} \Phi_2(x_1, x_k, z_j)) \to x_2 = x_3).$$

Здесь $u = z_1 \frown z_2 \frown z_3$.

1. Группы. Сигнатура теории групп — $\langle \cdot, {}^{-1}, 1 \rangle$. T — конечное множество аксиом группы.

Лемма 2 (М. Ю. Трофимов [22]). *Существует терм $t(x, z)$ сигнатуры теории групп такой, что для любой группы G, любой функции $f \subseteq G \times G$ найдутся группа G_1, расширяющая G, и набор $c \in G_1$, что*

$$f(a) = t(a, c) \text{ для всех } a \in \{x \in G \mid (\exists y)\, \langle x, y \rangle \in f\}.$$

Лемма 3 (А. Макинтайр [46]). *Пусть G — экзистенциально замкнутая группа и a, b — элементы G. Для того чтобы элемент a принадлежал подгруппе группы G, порожденной элементом b, необходимо и достаточно, чтобы в G было истинно*

$$(\forall x)(bx = xb \to ax = xa).$$

Из лемм 1, 2, 3 легко следует, что T — почти богатая теория. В самом деле, в качестве формулы $\Phi_1(x, z_1)$ в лемме 1 возьмем формулу

$$\Psi(x, z_1) \wedge (z_1 = 1 \vee (\exists y_2)(y_2 \neq 1 \wedge \Psi(y_2, z_1) \wedge$$
$$\wedge (\forall y_3)((y_3 \neq 1 \wedge \Psi(y_3, y_2)) \to \Psi(y_2, y_3)))),$$

где $\Psi(x_1, x_2)$ есть $(\forall x_3)(x_2 x_3 = x_3 x_2 \to x_1 x_3 = x_3 x_1)$. Легко понять, что $\Phi_1(x, z_1)$ утверждает, что z_1 порождает конечную подгруппу, содержащую x. В качестве $\Phi_2(x, y, z_2)$ годится формула $y = t(x, z_2)$, где t — терм из леммы 2.

Проверим, что T — богатая теория. Ясно, что T рекурсивно перечислима и обладает свойством совместного вложения.

Пусть X — произвольное множество натуральных чисел. Через $H(X)$ обозначим конечно порожденную группу, множество образующих которой есть $\{a, c\}$, где c — конечный набор символов в том же числе, что и в наборе z терма $t(x, z)$ из леммы 2, а множество определяющих соотношений есть

$$\{t(a^n, c) = 1 \mid n \in X\}.$$

В силу леммы 2 и теоремы компактности, элемент a порождает в $H(X)$ бесконечную подгруппу и $t(a^n, c) \neq 1$ в $H(X)$ для $n \notin X$. Ясно также, что множество номеров равенств из проблемы равенства для $H(X)$ рекурсивно перечислимо относительно X.

Если X — множество нечетных чисел, то X рекурсивно изоморфно множеству Y номеров равенств из множества

$$\{t(a^n, c) = 1 \mid n \in X\}.$$

Кроме того, Y рекурсивно выделяется в проблеме равенства для $H(X)$, так как Y есть пересечение проблемы равенства для $H(X)$ с множеством номеров всех равенств вида

$$t(a^n, c) = 1.$$

Осталось проверить, что условие б) из определения богатой теории тоже выполнено [1]).

В самом деле, если X и Y — рекурсивно перечислимые, непересекающиеся и рекурсивно не отделимые множества натуральных чисел, то всякая группа G, порождаемая a, b, c, для которых в G выполняются условия: $t(a^n, c) = a$ $(n \in X)$, $t(a^n, c) = b$ $(n \in Y)$, $a \neq b$, не может иметь рекурсивной проблемы равенства ($t(x, z)$ — здесь опять терм из леммы 2). Группу с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $t(a^n, c) = a$ $(n \in X)$, $t(a^n, c) = b$ $(n \in Y)$ по теореме Хигмэна [41] можно вложить в конечно определенную группу H. В качестве Ψ возьмем конъюнкцию определяющих соотношений H, равенств, выражающих a, b, c через образующие группы H, и неравенства $a \neq b$. Если H имеет образующие $x_1, \ldots, x_s$, то в качестве Φ возьмем

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_s)(\exists a)(\exists b)(\exists c)\Psi.$$

Эта Φ удовлетворяет условию б) из определения богатой теории.

2. Группы без кручения. Сигнатура та же, что и у теории групп. T состоит из конечного множества аксиом группы и из аксиом

$$(\forall x)(x^n = 1 \to x = 1) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Для групп без кручения имеет место аналог леммы 2 и годится тот же терм, что и в лемме 2. Доказательство получается дословным повторением доказательства из [22], если принять во внимание, что для каждого изоморфизма φ подгруппы H в группу G без кручения найдутся группы без кручения $G_1 \supseteq G$ и $t \in G_1$, что $\varphi h = tht^{-1}$ в G_1 для любого $h \in H$. Доказательство последнего утверждения приведено, например, в доказательстве леммы 1 из § 38 книги [14] или в доказательстве леммы 2 приложения 1 в книге [25]. Надо только принять еще во внимание хорошо известный факт, что свободное произведение групп без кручения с объединенной подгруппой является группой без кручения. Аналог леммы 3 тоже верен для групп без кручения. В качестве $\Phi_1(x, z_1)$ в лемме 1 годится формула

$$\Psi(u_2, u_1) \wedge \Psi(x, u_1) \wedge \Psi(u_2, x),$$

где $\Psi(x_1, x_2)$, как и раньше, есть

$$(\forall x_3)(x_3x_2 = x_2x_3 \to x_3x_1 = x_1x_3).$$

Здесь $z_1 = \langle u_1, u_2\rangle$. Далее без изменений проходят все рассуждения, что и в случае групп, показывающие, что теория T является богатой. Только при проверке выполненности условия б) надо использовать, что любая конечно порожденная с рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений группа без кручения изоморфна вкладывается в конечно определенную группу без кручения. Это фактически доказано в приложении 1 книги [25].

[1]) В [46] это утверждение приписывается Миллеру (C. F. Miller III).

3. Полугруппы. Сигнатура теории полугрупп есть $\langle \cdot \rangle$. T состоит из одной аксиомы ассоциативности.

Лемма 4 (Л. А. Бокуть [9]). *Пусть G — произвольная полугруппа и $f \subseteq G \times G$ — произвольная функция. Тогда найдутся полугруппа G_1, расширяющая G, и элементы c_1, c_2 в G_1 такие, что $f(a) = c_1 a c_2$ для всех элементов a из области определения f.*

Лемма 5 (В. Я. Беляев [6]). *Пусть G — экзистенциально замкнутая полугруппа, a и b — элементы G. Для того чтобы a принадлежал подполугруппе, порожденной в G элементом b, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall x)(xbx = bx \to xax = ax)$$

было истинно в G.

Действуя далее по той же схеме, что и в случае групп, получим, что теория полугрупп тоже является богатой. Вместо ссылки на результат Хигмэна надо теперь ссылаться на результат В. Л. Мурского [16]. Заметим только, что элемент a порождает конечную подполугруппу тогда и только тогда, когда в подполугруппе, порожденной a, есть идемпотент.

4. Полугруппы без кручения. Сигнатура та же, что и у теории полугрупп. T состоит из аксиомы ассоциативности и аксиомы $(\forall x)x^2 \neq x$.

К теории полугрупп без кручения за небольшим исключением применимы те же формулы и рассуждения, что и в случае теории полугрупп.

Лемма 6. *Пусть G — полугруппа без кручения и $f \subseteq G \times G$ — произвольная функция. Тогда найдутся полугруппа без кручения G_1, расширяющая G, и элементы c_1, c_2 в G_1 такие, что $f(a) = c_1 a c_2$ для всех a из области определения f.*

Доказательство. Представим G как полугруппу, заданную в классе полугрупп множеством образующих, которыми являются все элементы G, и множеством Σ определяющих соотношений, в которое входят все верные в G равенства. Пусть G_1 — полугруппа, заданная в классе полугрупп множеством $G \cup \{c_1, c_2\}$ образующих и множеством

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{f(a) = c_1 a c_2 \mid a \in G\}$$

определяющих соотношений. Надо доказать, что G_1 является полугруппой без кручения, расширяющей G. Считаем, что область определения f есть G.

Пусть W — произвольное слово в алфавите $G \cup \{c_1, c_2\}$. W назовем редуцированным, если оно не содержит подслов вида $c_1 c_2$ и $c_1 a_1 \ldots a_n c_2$, где $a_1, \ldots, a_n \in G$. Если W не является редуцированным, то мы можем в W любое подслово $c_1 a_1 \ldots a_n c_2$ заменить на $f(a_1 \ldots a_n)$, а слово $c_1 c_2$ вычеркнуть. Если вновь полученное слово не является редуцированным, то мы можем продолжить эту процедуру. Через конечное число шагов получим редуцированное слово, которое, легко видеть, определяется единственным образом. Это слово обозначим через $\mathrm{red}\, W$.

Легко видеть, что если $n > 0$ и $W_0, W_1, \ldots, W_n$ — последовательность слов в алфавите $G \cup \{c_1, c_2\}$, где W_{i+1} получено из W_i элементарным преобразованием из Σ^* для $i = 0, \ldots, n-1$ (такие последовательности будем называть выводами в Σ^*), то последовательность $\mathrm{red}\, W_0, \mathrm{red}\, W_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{red}\, W_n$ есть вывод в Σ. Это доказывает, что G_1 — расширение G.

Если теперь слово W является редуцированным словом в алфавите $G \cup \{c_1, c_2\}$ и в Σ^* выводимо равенство $WW = W$, то в W число вхождений буквы c_1 совпадает с числом вхождений буквы c_2. Если теперь WW — редуцированное слово, то равенство $WW = W$ выводится в Σ. Если в этом выводе во всех словах вычеркнуть все вхождения букв c_1 и c_2, то выйдет, что в Σ выводимо $W_1 W_1 = W_1$ для некоторого слова W_1 в алфавите G, чего быть не может, если W_1 не является пустым. Если W_1 пусто, то W является словом в алфавите $\{c_1, c_2\}$, а тогда равенство $WW = W$ может быть выведено из Σ, только если W — пустое слово. Если же WW не является редуцированным, то из редуцированности W следует, что

$$W = W_1V_1W_2V_2W_3,$$

где W_1, W_2, W_3 — слова в алфавите G, V_1 — слово в алфавите $G \cup \{c_2\}$, начинающееся и оканчивающееся на c_2, V_2 — слово в алфавите $G \cup \{c_1\}$, начинающееся и оканчивающееся на c_1, откуда, редуцируя WW, получим

$$W_1V_1W_2UW_2V_2W_3,$$

где U — слово в алфавите G. Значит, в Σ из W выводимо

$$W_1V_1W_2UW_2V_2W_3,$$

откуда $W_2 = W_2UW_2$ в G. Теперь

$$UW_2 = UW_2UW_2 \text{ в } G.$$

При этом слово UW_2 не является пустым. Противоречие.

Лемма 7. *Пусть G — полугруппа, экзистенциально замкнутая в теории полугрупп без кручения, a и b — элементы G. Для того чтобы a принадлежал подполугруппе, порожденной b в G, необходимо и достаточно, чтобы в G было истинно*

$$(\forall x)(xbx = bx \to xax = ax).$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть

$$(\forall x(xbx = bx \to xax = ax)$$

истинно в G. Пусть G_1 задана в классе полугрупп множеством образующих $G \cup \{x\}$ и множеством определяющих соотношений

$$\Sigma \cup \{xbx = bx\},$$

где Σ — множество всех истинных в G равенств. Покажем, что G_1 — полугруппа без кручения, расширяющая G. Ясно, что G_1 расширяет G. Допустим, что в G_1 существует идемпотент. Тогда для некоторого слова W в алфавите $G \cup \{x\}$ в $\Sigma \cup \{xbx = bx\} = \Sigma^*$ существует вывод равенства $WW = W$. Ясно, что в W имеются вхождения букв из G. Если во всех словах вывода вычеркнуть все буквы x, то получим вывод в Σ некоторого равенства $W_1W_1 = W_1$, где W_1 — слово в алфавите G. Противоречие. Таким образом, G_1 — полугруппа без кручения. Если бы $xax \neq ax$ в G_1, то из экзистенциальной замкнутости G следовало бы существование такого $y \in G$, что $yby = by$ и $yay \neq ay$, а это противоречило бы выбору a и b. Значит, $xax = ax$ в G_1. Рассмотрим вывод в Σ^* равенства $xax = ax$. Пусть это $W_0 = ax, \ldots, W_n = xax$. Индукцией по i легко проверить, что в каждом слове W_i каждый конечный отрезок, начинающийся с x, после вычеркивания всех вхождений x равен в G некоторому слову в алфавите $\{b\}$. Это доказывает лемму.

Теперь легко уже показать, что T — почти богатая теория. В качестве $\Phi_2(x, y, z_2)$, как и раньше, годится формула $y = u_1xu_2$, где $z_2 = \langle u_1, u_2\rangle$. В качестве $\Phi_1(x, z_1)$ надо взять формулу, утверждающую, что в полугруппе, порожденной u_3, лежат x и u_4 и существует такой y в полугруппе, порожденной u_3, что $u_4 = xy$. Здесь $z_1 = \langle u_3, u_4\rangle$. То, что теория полугрупп без кручения является почти богатой и удовлетворяет условию а) из определения богатой теории, доказывается так же, как и для теории групп.

Для доказательства выполненности условия б) рассмотрим множества X и Y натуральных чисел, которые рекурсивно перечислимы, но не являются рекурсивно отделимыми. Рассмотрим также машину Тьюринга, которая, начиная с x, воспринятом в стандартном положении на ленте, останавливается в ситуации со словом Поста hs_1q_0h, если $x \in X$, и в ситуации со словом Поста

$hs_1s_1q_0h$, если $x \in Y$. Определения и подробности см. в §§ 67, 68, 71 из [12]. По этой машине Тьюринга построим полугруппу, образующие которой — это символ h, состояния и символы, которые печатаются на ленте этой машины, а определяющие соотношения — это все равенства, получаемые из правил вывода полусистемы Туэ, построенной для нашей машины, если левой частью сделать верхнее слово, а правой — нижнее слово одного и того же из этих правил. Легко проверяется, что полученная полугруппа — полугруппа без кручения и в ней выполняется неравенство

$$hs_1q_0h \neq hs_1s_1q_0h.$$

Если образующие полученной полугруппы — это $x_1, \ldots, x_s$, а Ψ — конъюнкция всех ее определяющих соотношений и неравенства

$$hs_1q_0h \neq hs_1s_1q_0h,$$

то формула $(\exists x_1) \ldots (\exists x_s)\Psi$, как легко видеть, годится в качестве формулы, фигурирующей в условии б) из определения богатой теории. Заметим кстати, что эта же формула годится и для теории полугрупп. Так что в п. 3 этого параграфа мы могли бы избежать ссылки на работу В. Л. Мурского [16].

5. Полугруппы с сокращением. Сигнатура теории полугрупп с сокращением — опять $\langle \cdot \rangle$. T состоит из аксиомы ассоциативности и из аксиомы

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((xy = xz \to y = z) \wedge (yx = zx \to y = z)).$$

Известно и легко доказывается, что в полугруппе с сокращением имеется не более одного идемпотента. Известно также [13], что если e — идемпотент какой-либо полугруппы G, то множество всех таких $a \in G$, что в G истинна формула

$$(zy = yz = x \wedge yx = xy = y \wedge zx = xz = z),$$

которую мы обозначаем через $Gp(x, y, z)$, при приписывании x значения e, y — значения a, а z — какого-либо значения, хотя бы одного, является подгруппой G_e с единицей e полугруппы G, причем включает в себя все подгруппы G с единицей e.

Лемма 8 (Б. Нейман [51]). *Если G — полугруппа с сокращением и $f \subseteq G \times G$ — равнозначная функция, то найдутся полугруппа с сокращением G_1, содержащая G, и элементы c_1, c_2, c_3, c_4 в G_1 такие, что*

$$c_1f(a)\,c_2 = c_3ac_4$$

для всех a из области определения f.

Для построения Φ_2 заметим, что всякая функция является композицией разнозначных функций и функций из максимальной подгруппы в максимальную подгруппу. Как показал Б. Нейман [51], в экзистенциально замкнутой в теории полугрупп с сокращением полугруппе имеется точно одна максимальная подгруппа, которая является экзистенциально замкнутой группой. Как мы уже заметили, эта максимальная подгруппа в полугруппе с сокращением определяется формулой $\Phi'(y)$, равной

$$(\exists x)(\exists z)(x^2 = x \wedge Gp(x, y, z)).$$

Релятивизируя кванторы в $\Phi_1(x, z_1)$ для теории групп по $\Phi'(y)$, получим соответствующую формулу для теории полугрупп с сокращением. Далее доказательство того, что теория полугрупп с сокращением является богатой, отличается от доказательства соответствующего утверждения для теории групп только при проверке выполнимости условия б) из определения богатой теории. Если формула из этого условия для теории групп имеет вид $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\Psi$, где Ψ является конъюнкцией равенств и неравенств полугрупповых слов в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n, x^{-1}_1, \ldots, x^{-1}_n\}$, то заменим в Ψ каждое вхождение x_i^{-1} на x_{n+i}. Полученную таким образом из Ψ формулу обозначим через Ψ^*. Пусть Φ есть

$$(\exists x_1)\ \dots\ (\exists x_{2n})(\exists x_{2n+1})(\Psi^* \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} Gp(x_{2n+1},\ x_i,\ x_{n+i})).$$

Эта Φ годится в качестве формулы из условия б) для теории полугрупп с сокращением.

§ 5. Инверсные полугруппы

Сигнатура теории инверсных полугрупп — $\langle\,\cdot,\ ^{-1}\rangle$. Множество T состоит из аксиом

$$(\forall x)(xx^{-1}x = x \wedge x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}),$$
$$(\forall x)(\forall y)((x^2 = x \wedge y^2 = y) \rightarrow xy = yx)$$

и аксиомы ассоциативности.

Примером инверсной полугруппы может служить множество J_X всех частичных одно-однозначных преобразований непустого множества X, т. е. множество всех таких $f \subseteq X \times X$, что для всяких $\langle x,\ y\rangle$, $\langle x,\ y_1\rangle$, $\langle x_1,\ y\rangle$ из f одновременно $x = x_1$ и $y = y_1$. Умножение на J_X определяется как обычная композиция отношений на множестве X, т. е.

$$fg = \{\langle x,\ y\rangle \mid \text{существует } z, \text{ что } \langle x,\ z\rangle \in f \text{ и } \langle z,\ y\rangle \in g\},$$

операция $^{-1}$ соответствует взятию обратного отношения, т. е.

$$f^{-1} = \{\langle x,\ y\rangle \mid \langle y,\ x\rangle \in f\}.$$

Известно также, что любая инверсная полугруппа S изоморфна подполугруппе полугруппы J_S и этот изоморфизм устанавливается следующим образом. Для $a \in S$ определяется ρ_a как отображение Sa^{-1} на Sa, определяемое формулой $x\rho_a = xa$ для всех $x \in Sa^{-1}$ (см. [13], с. 51—53). Мы будем использовать также теорему Т. Е. Холла [39] о том, что класс инверсных полугрупп обладает сильным свойством амальгамирования, т. е. для двух инверсных полугрупп G_1 и G_2, имеющих общую инверсную подполугруппу A, причем $G_1 \cap G_2 = A$, существует инверсная полугруппа G, в которой G_1 и G_2 содержатся в качестве инверсных подполугрупп. Инверсная полугруппа, порожденная элементом a, называется бициклической, если $a = aaa^{-1}$ и $aa^{-1} \neq a^{-1}a$. Известно (см. [13], с. 69—70), что любой элемент бициклической полугруппы единственным образом представим в виде $a^{-m}a^n$, где $m,\ n \geqslant 0$ и $a^0 = aa^{-1}$.

Лемма 1 (И. И. Мельник [15]). *Пусть G — инверсная полугруппа и G_1 — инверсная подполугруппа, порожденная в G элементами $a_1, \dots, a_n$. Пусть φ — изоморфизм G_1 на инверсную подполугруппу, порожденную в G элементами $b_1, \dots, b_n$, при котором $\varphi a_i = b_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда существуют инверсная полугруппа H, в которой G содержится в качестве инверсной подполугруппы, и такой $t \in H$, что*

$$b_i = t^{-1}a_it,\quad a_itt^{-1} = a_i,\quad a_i^{-1}tt^{-1} = a_i^{-1} \text{ для } i = 1, \dots, n.$$

В частности, для всех $x \in G_1$

$$\varphi(x) = t^{-1}xt.$$

Доказательство. Используя свойство амальгамирования, легко построить инверсную полугруппу G', расширяющую G, и автоморфизм φ' инверсной полугруппы G', продолжающий φ. Напомним, что G' изморфна подполугруппе инверсной полугруппы $J_{G'}$, где элементу a соответствует $\rho_a \in J_{G'}$. В качестве искомой H теперь можно взять $J_{G'}$, а в качестве t — функцию φ' как элемент $J_{G'}$.

Лемма 2. *Пусть G — инверсная полугруппа, экзистенциально замкнутая в теории инверсных полугрупп. Для того чтобы $b \in G$ принадлежал инверсной подполугруппе, порожденной в G элементами $a_1, \ldots, a_n$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall x)((\bigwedge_{i=1}^{n}(x^{-1}a_ix = a_i \wedge a_ixx^{-1} = a_i \wedge a_i^{-1}xx^{-1} = a_i^{-1})) \to x^{-1}bx = b)$$

было истинно в G.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть в G истинна написанная формула, но b не принадлежит инверсной подполугруппе, порожденной $a_1, \ldots, a_n$. Рассмотрим изоморфную копию G' инверсной полугруппы G такую, что элементы инверсной полугруппы, порожденной $a_1, \ldots, a_n$ в G, являются единственными общими элементами G и G'. Существует инверсная полугруппа G_1, содержащая G и G' в качестве инверсных подполугрупп. Если b' в G' соответствует b, то $b \neq b'$ и существует изоморфизм инверсной подполугруппы, порожденной в G элементами $a_1, \ldots, a_n, b$, на инверсную подполугруппу, порожденную в G' элементами $a_1, \ldots, a_n, b'$, переводящий b в b' и оставляющий $a_1, \ldots, a_n$ на месте. По лемме 1, существует инверсная полугруппа G_2, расширяющая G_1, в которой есть такой t, что $a_i = t^{-1}a_it$, $a_itt^{-1} = a_i$, $a_i^{-1}tt^{-1} = a_i^{-1}$, $t^{-1}bt = b'$ для $i = 1, \ldots, n$. Значит, в силу экзистенциальной замкнутости G, в G решается система

$$a_i = x^{-1}a_ix,\ a_ixx^{-1} = a_i,\ a_i^{-1}xx^{-1} = a_i^{-1},\ x^{-1}bx \neq b\ (i = 1, \ldots, n).$$

А это противоречит выбору $a_1, \ldots, a_n, b$.

Лемма 3. *Пусть G — произвольная счетная инверсная полугруппа и $\{\alpha_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ — произвольная нумерация ее элементов. Тогда G может быть вложена в такую инверсную полугруппу, порожденную тремя элементами a, b, c, что*

$$\alpha_n = ba^nca^{-n}b^{-1} \text{ для } n = 1, 2, \ldots$$

При этом элемент a порождает инверсную бициклическую полугруппу с единицей aa^{-1}.

Доказательство. Наша конструкция аналогична той, которая приведена в [64] в доказательстве теоремы Эванса для полугрупп. Считаем, что G есть подполугруппа полугруппы частичных одно-однозначных преобразований множества N всех натуральных чисел. Для натурального $n \geqslant 1$ через A_n обозначим множество

$$\{2^n(2m + 1) \mid m = 0, 1, \ldots\}.$$

Ясно, что при различных натуральных n_1 и n_2 пересечение $A_{n_1} \cap A_{n_2}$ пусто. Определяем теперь a, b, c как частичные преобразования множества N, полагая $ta = 2t$ для $t \in N$; $tb = 2t + 1$ для $t \in N$; $tc = 2^n(2\cdot(m\alpha_n) + 1)$, если $t = 2^n(2m + 1)$ и $m\alpha_n$ определено, и tc не определено в противном случае. Легко видеть, что преобразование c элементы A_n переводит в элементы A_n и потому одно-однозначно. Непосредственно проверяется, что a, b, c удовлетворяют требуемым условиям.

Теорема. *Теория инверсных полугрупп является богатой.*

Доказательство. В классе инверсных полугрупп, экзистенциально замкнутых в теории инверсных полугрупп, формулами сигнатуры $\langle \cdot, {}^{-1} \rangle$ легко записать следующие свойства: элемент z_3 порождает бициклическую полугруппу (формула $z_3z_3z_3^{-1} = z_3 \wedge z_3z_3^{-1} \neq z_3^{-1}z_3$); элемент z_1 порождает бициклическую полугруппу и z_2 есть положительная степень z_1 (формула

$$z_1z_1z_1^{-1} = z_1 \wedge z_1z_1^{-1} \neq z_1^{-1}z_1 \wedge (\forall x)((x^{-1}z_1x = z_1 \wedge z_1xx^{-1} = \\ = z_1 \wedge z_1^{-1}xx^{-1} = z_1^{-1}) \to x^{-1}z_2x = z_2) \wedge z_2z_2^{-1} = z_1z_1^{-1});$$

элементы z_1, z_3 порождают бициклические полугруппы, z_2 и z_4 — степени z_1 и z_3, и если $z_2 = z_1^n$, $z_4 = z_3^m$, то $m = n$ (формула является конъюнкцией двух предыдущих формул и формулы

$$(\exists x)(x^{-1}z_1x = z_3 \wedge z_1xx^{-1} = z_1 \wedge x^{-1}z_2x = z_4));$$

элементы z_1, z_3 порождают бициклические полугруппы, z_4 и z_5 — степени z_3 и z_1 и, если $z_4 = z_3^n$, $z_5 = z_1^m$, то $n < m$ (нужная формула получается из конъюнкции предыдущей формулы и формулы, утверждающей, что z_5, z_6 — степени z_1, и $z_5 = z_2 \cdot z_6$, если на эту конъюнкцию навесить кванторы существования по z_2 и z_6).

Теперь легко написать формулу $\theta^T(x, y, u)$, где

$$u = \langle z_1, z_2, z_4, z_6, z_7, z_8, z_9\rangle,$$

из определения почти богатой теории, годящуюся, когда T — это теория инверсных полугрупп.

Эта формула утверждает существование таких z_3, z_5, что z_1, z_2 порождают бициклические полугруппы; z_3 и z_4 — степени z_1, причем, если $z_3 = z_1^m$, $z_4 = z_1^n$, то $m < n$; z_5 — степень z_2, и если $z_3 = z_1^m$, $z_5 = z_2^n$, то $m = n$;

$$x = z_6z_3z_7z_3^{-1}z_6^{-1},\quad y = z_8z_5z_9z_5^{-1}z_8^{-1}.$$

Из леммы 3 следует, что эта формула годится.

Осталось проверить, что теория инверсных полугрупп удовлетворяет условиям а) и б) из определения богатой теории. Так как любая группа является инверсной полугруппой, то условие а) выполнено. Формулу $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\Psi$ из условия б) для групп легко переделать в формулу, подходящую для теории инверсных полугрупп. Для этого достаточно в Ψ все вхождения символа 1 заменить на новую переменную x_{n+1}. Получим Ψ'. Понятно, что искомой будет формула

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\exists x_{n+1})(\Psi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (x_ix_i^{-1} = x_i^{-1}x_i = x_{n+1})).$$

§ 6. Ассоциативные кольца

Сигнатура теории колец — $\langle +, -, \cdot, 0\rangle$. T — конечное множество аксиом ассоциативного кольца.

Л е м м а 1. *Пусть K — кольцо, экзистенциально замкнутое в теории ассоциативных колец, $[a]$ — подкольцо, порожденное a в K. Тогда и только тогда $b \in [a]$, когда в K истинно*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((ax = xy \wedge zxy = azx) \to zbx = bzx).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону лемма очевидна. Пусть в K истинна написанная формула. Считаем, что K есть фактор-кольцо F/I, где F — свободное в классе ассоциативных колец кольцо с множеством X свободных образующих, a и b — различные буквы из X, I — идеал кольца F. Пусть x, y, z — попарно различны и не из X, а F_1 — свободное кольцо с множеством $X \cup \{x, y, z\}$ свободных образующих. Пусть I_1 — идеал в F_1, порожденный множеством

$$I \cup \{ax - xy,\ zxy - azx\}.$$

Ясно, что $I_1 \cap F = I$ и, значит, $F_1/I_1 \supseteq K$. Из экзистенциальной замкнутости K следует, что $zbx - bzx \in I_1$. Поэтому имеем равенство в F_1, левая часть которого есть $zbx - bzx$, а правая есть

$$(1)\quad \sum_{v_1,\, v_2} \sum_{i=1}^{k} n(i,\, v_1,\, v_2) v_1 \alpha(i,\, v_1,\, v_2) v_2 + \\ + \sum_{w_1,\, w_2} [m_1(w_1,\, w_2) w_1 (ax - xy) w_2 + m_2(w_1,\, w_2) w_1 (zxy - azx) w_2],$$

где v_1, v_2, w_1, w_2—полугрупповые слова от $X \cup \{x,\ y,\ z\}$ (возможно, пустые), а $k > 0$,

$$m_1(w_1,\, w_2),\ m_2(w_1,\, w_2),\ n(i,\, v_1,\, v_2)$$

— целые числа. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{k} n(i,\, v_1,\, v_2) \alpha(i,\, v_1,\, v_2) \in I, \quad \text{а} \quad \alpha(i,\, v_1,\, v_2)$$

— непустые полугрупповые слова от X. Суммы каждый раз берутся по некоторому конечному множеству пар слов указанного вида. Считаем также, что каждое v_1 либо пусто, либо оканчивается на одну из букв x, y, z, а каждое v_2 либо пусто, либо начинается на одну из букв x, y, z.

Слово w от $X \cup \{x,\ y,\ z\}$ назовем правильным, если $w = u_1 z u_2 x y^n$, где u_1, u_2 — слова от X (возможно, пустые), а n — натуральное число. Для каждых v_1, v_2, w_1, w_2 имеем:

слова $v_1 \alpha(i,\, v_1,\, v_2) v_2$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ правильные или неправильные все одновременно;

слова $w_1 a x w_2$ и $w_1 x y w_2$ правильные или неправильные одновременно;

слова $w_1 z x y w_2$ и $w_1 a z x w_2$ правильные или неправильные одновременно.

Собирая в (1) все неправильные слова и сокращая их, получим представление того же вида, в котором ненулевые коэффициенты стоят только при правильных словах. Рассматривая теперь только те полугрупповые слова в (1), которые начинаются с z, получим

$$(2)\quad zbx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i} n(i,\, z,\, xy^n) z \alpha(i,\, z,\, xy^n) xy^n + \\ + \sum_{u \in F} \sum_{n=0}^{\infty} m_1(zu,\, y^n) zu(ax - xy) y^n + \sum_{n=0}^{\infty} m_2(\varnothing,\, y^n) zxy^{n+1}.$$

Равенство (2) — это равенство в свободном кольце F_1. Если в нем заменить все буквы y на буквы a, а буквы x и z опустить, то равенство сохранится. В результате получим

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i} n(i,\, z,\, xy^n)\, \alpha\,(i,\, z,\, xy^n)\Big)\, a^n + \sum_{n=0}^{\infty} m_2(\varnothing,\, y^n)\, a^{n+1}.$$

Л е м м а 2. *Пусть K — ассоциативное кольцо, $a_1^i, \ldots, a_{s_i}^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — такие элементы K, что аддитивная группа кольца K является прямой суммой группы H_i, порожденной $a_1^i, \ldots, a_{s_i}^i$, и группы G_i. Пусть φ_i — гомоморфизм группы H_i в аддитивную группу кольца K и $\varphi_i(a_j^i) = b_j^i$ для $j = 1, \ldots, s_i$. Тогда существуют ассоциативное кольцо K_1, расширяющее K, и в нем такие u_i и v_i, что*

$$(3)\qquad u_i a_j^i v_i = b_j^i \quad \textit{в } K_1 \textit{ для } \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, s_i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считаем, что K есть F/I, где I — свободное кольцо с множеством X свободных образующих, а I — идеал в F. Считаем, что $a_1^i, \ldots, a_{s_i}^i, b_1^i, \ldots, b_{s_i}^i \in X$. Пусть F_1 — свободное кольцо с множеством

$$X \cup \{u_i, v_i \mid i = 1, \ldots, m\}$$

свободных образующих, где $u_i, v_i \notin X$ $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть I_1 — идеал, порожденный в F_1 множеством

$$I \cup \{u_i a_j^i v_i - b_j^i \mid i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, s_i\}.$$

Пусть $K_1 = F_1/I_1$. Ясно, что в K_1 выполняются равенства (3). Надо показать, что K_1 — расширение K. Пусть

$$(4)\quad y = \sum_{w,\, w',\, i,\, j} n(w, w', i, j) w(u_i a_j^i v_i - b_j^i) w' + \sum_{\sigma \in I,\, w_1,\, w_2} w_1 \sigma w_2,$$

где w, w', w_1, w_2 — полугрупповые слова от

$$X \cup \{u_i, v_i \mid i = 1, \ldots, m\},$$

а y — кольцевое слово от X. При этом w_1 оканчивается на u_i или v_i, а w_2 начинается с u_i или v_i, а $n(w, w', i, j)$ — целые числа. Пусть φ_i' — эндоморфизм аддитивной группы кольца K, оставляющий x на месте для $x \in G_i$ и продолжающий φ_i. В правой части (4), рассматриваемой как линейная комбинация полугрупповых слов, каждое вхождение $u_i z v_i$, где z — слово от X, заменяем на $\varphi_i'(z)$. В полученной линейной комбинации проделываем те же замены и т. д. В результате получим, что $y \in I$, и значит, $y = 0$ в K.

Лемма 3. а) *В кольце K_0, заданном в классе ассоциативных колец образующими z, z_1, z_2, z_3 и определяющими соотношениями*

$$z_1 z z_2 = 0,\ z_1 z z - z = 0,\ z_3 z z - z_3 z = 0,$$

подкольцо, порожденное z, является свободным в классе ассоциативных колец. Аддитивная группа кольца K_0 является прямой суммой аддитивной группы кольца $[z]$, порожденного z в K_0, бесконечной циклической группы, порожденной $z_3 z z_2$, и некоторой группы G_0.

б) *В кольце K_1, заданном в классе ассоциативных колец образующими z, z_1, z_2, z_3 и определяющими соотношениями*

$$z^2 - 2z = 0,\ z^2 z_2 - z = 0,\quad z_1 z^2 z_3 = 0,$$

элемент $z_1 z z_3$ отличен от нуля, а z имеет бесконечный порядок в аддитивной группе кольца K_1.

Доказательство. Через F обозначим свободное в классе ассоциативных колец кольцо со свободными образующими z, z_1, z_2, z_3.

а) Пусть y принадлежит подкольцу, порожденному z в K_0. Пусть $y + nz_3 z z_2 + g_1$ равняется в F элементу идеала, порожденного определяющими соотношениями кольца K_0, где n — целое число, а g_1 — целочисленная линейная комбинация полугрупповых слов от z, z_1, z_2, z_3, каждое из которых отлично от $z_3 z z_2$ и не содержит подслов $z_1 z z_2$, $z_1 z z$, $z_3 z z$, а также не является словом от z.

Заменяя в этом равенстве каждое вхождение $z_1 z z$ на z, $z_3 z z$ — на $z_3 z$, $z_1 z z_2$ — на нуль, в полученных линейных комбинациях опять делая эти же замены и т. д., получим, что $n = 0$, а g_1 — нуль кольца F. Кроме того, в y, рассматриваемом как целочисленная линейная комбинация степеней z, все коэффициенты равны нулю.

б) Если $z_1 z z_3$ равняется в F элементу идеала, порожденного определяющими соотношениями кольца K_1, то можно считать, что этот элемент идеала является целочисленной линейной комбинацией полугрупповых слов вида

$$z_1 w_1 (z^2 - 2z) w_2 z_3 \quad \text{или} \quad z_1 w_1 (z^2 z_2 - z) w_2 z_3,$$

где w_1 и w_2 — слова от z и z_2, и слова $z_1z^2z_3$. Так как равенство имеет место в F, то оно имеет место в любом ассоциативном кольце при любых значениях z, z_1, z_2, z_3. Полагая в кольце многочленов с рациональными коэффициентами от z_3 в качестве значений z, z_1, z_2, z_3 элементы 2, 1, $^1/_2$, z_3, получим, что $2z_3 = 4mz_3$ в этом кольце многочленов. Противоречие.

Лемма 4. *Если в ассоциативном кольце $z_1zz_2 = z_1zz - z = 0$, а zz_2 имеет бесконечный порядок в аддитивной группе этого кольца, то z порождает в этом кольце подкольцо, которое является свободным в классе ассоциативных колец.*

Доказательство. Пусть $s_1, n_1, \ldots, s_k, n_k$ — целые числа, $s_1 > s_2 > \ldots > s_k > 0$ и $n_1 \neq 0$. Если $n_1z_{s_1} + \ldots + n_kz_{s_k} = 0$ в рассматриваемом кольце, то в нем

$$n_1z + n_2z_1^{s_1-s_2}z + \ldots + n_kz_1^{s_1-s_k}z = 0 \quad \text{и} \quad n_1zz_2 = 0.$$

Лемма 5. *В аддитивной группе каждого кольца, экзистенциально замкнутого в теории ассоциативных колец, имеется элемент бесконечного порядка.*

Доказательство. Формула

$$(\exists z)(\exists z_1)(\exists z_2)(\exists z_3)(z_1zz_3 \neq 0 \wedge z^2 = 2z \wedge z^2z_2 = z \wedge z_1z^2z_3 = 0)$$

истинна в прямом произведении рассматриваемого экзистенциально замкнутого кольца K с внешне присоединенной единицей и кольца K_1 из леммы 3 с внешне присоединенной единицей. Это прямое произведение является расширением K. Из экзистенциальной замкнутости K следует, что написанная формула истинна и в K. Если a, a_1, a_2, $a_3 \in K$ и $a_1aa_3 \neq 0$, $a^2 - 2a = a^2a_2 - a = a_1a^2a_3 = 0$ в K, то a имеет бесконечный порядок в аддитивной группе кольца K. Действительно, если порядок a есть n и $(2, n) = 1$, то найдутся такие целые m_1 и m_2, что $m_1 \cdot n + m_2 \cdot 2 = 1$. Теперь

$$a = m_1 \cdot na + m_2 \cdot 2a = m_2a^2, \quad a_1aa_3 = a_1m_2a^2a_3 = 0.$$

Если же $n = 2 \cdot n_1$, то

$$n_1a = n_1a^2a_2 = 2 \cdot n_1aa_2 = naa_2 = 0.$$

Теорема. *Теория T ассоциативных колец является богатой.*

Доказательство. В качестве $\theta^T(x, y, u)$ из определения почти богатой теории возьмем

$$\begin{aligned} w_1ww_3 \neq 0 \wedge w^2 = 2w \wedge w^2w_2 = w \wedge w_1w^2w_3 = 0 \wedge z_1zz_2 = {} \\ = 0 \wedge z_1zz = z \wedge z_3zz = z_3z \wedge u_1z_3zz_2v_1 = {} \\ = w \wedge (\exists y_1)(\exists y_2)(x = u_2y_1v_2 \wedge y = u_3y_1v_3 \wedge y_1 \in {} \\ \in [z] \wedge y_2 \in [z] \wedge z_4 = y_1y_2 \wedge z_3y_1 = z_3z) \end{aligned}$$

где

$$u = \langle w, w_1, w_2, w_3, z, z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Пусть $A \in \mathcal{E}(T)$, H — конечное подмножество $|A|^2$, при этом $H = \{\langle d_1, b_1\rangle, \ldots, \langle d_s, b_s\rangle\}$, K_0 — кольцо из леммы 3, a, a_1, a_2, $a_3 \in |A|$, $a_1aa_3 \neq 0$, $a^2 - 2a = a^2a_2 - a = a_1a^2a_3 = 0$. В расширении общего расширения K_0 и A, которое является прямым произведением этих колец с внешне присоединенными единицами, разрешима система уравнений

$$z_1zz_2 = 0, \quad z_1z^2 = z, \quad z_3zz = z_3z, \quad u_1z_3zz_2v_1 = a,$$
$$u_2z^iv_2 = d_i \quad (i = 1, \ldots, s), \qquad u_3z^iv_3 = b_i \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Значит, эта система уравнения разрешима и в A. Возьмем z^{s+1} в качестве z_4. По лемме 4, $\theta^T(x, y, u)$ истинно в A тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle \in H$.

Наоборот, пусть для некоторого набора u элементов $|A|$ истинно $\theta^T(x, y, u)$ для некоторых x и y из $|A|$. Тогда z порождает свободное в классе ассоциативных колец подкольцо кольца A. Возможные значения для y_1 — это делители z_4 в $[z]$. Значит, для y_1 имеет только конечное число возможных значений.

Пусть X — произвольное множество натуральных чисел. Через $K(X)$ обозначим кольцо, заданное в классе ассоциативных колец образующими a и b и определяющими соотношениями

$$(5) \qquad ba^ib = 0 \qquad (i \in X).$$

Легко проверяется, что в этом кольце $ba^ib = 0$ тогда и только тогда, когда $i \in X$. Ясно, что множество Y всех номеров равенств (5) для множества X нечетных натуральных чисел рекурсивно изоморфно X и рекурсивно выделяется в проблеме равенства для $K(X)$. Ясно также, что множество номеров равенств из проблемы равенства для $K(X)$ рекурсивно перечислимо относительно Y.

Так как каждая полугруппа является подполугруппой мультипликативной полугруппы некоторого кольца, то условие б) из определения богатой теории для теории ассоциативных колец тоже выполнено. В качестве формулы Ф из этого условия годится формула из этого условия для теории полугрупп.

§ 7. Тела

Сигнатура теории тел — $\langle +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\rangle$. T — множество аксиом тела. Известно, что T можно выбрать состоящим из аксиом ассоциативного кольца и дополнительно

$$(\forall x)(1\cdot x = x\cdot 1 = x), \quad (\forall x)(x \neq 0 \to (xx^{-1} = x^{-1}x = 1)),$$
$$1 \neq 0, \quad 0^{-1} = 0$$

(последняя формула включается, чтобы сделать $^{-1}$ всюду определенной операцией). Если к T добавить для простого p еще формулу $p\cdot 1 = 0$, то получим множество T_p аксиом тела характеристики p, а если добавить формулы $n\cdot 1 \neq 0$ для натуральных n к T, то получим множество T_0 аксиом тела характеристики 0. Как обычно, здесь $(n+1)\cdot 1$ для $n \in N$ есть $(n\cdot 1) + 1$.

Лемма 1 (А. Макинтайр [48]). *Пусть $t_0, \ldots, t_m, t_{m+1}$ — термы групповой сигнатуры, не содержащие переменных, отличных от $x_0, \ldots, x_n$, и*

$$(\exists x_0) \ldots (\exists x_n)(t_0 = 1 \wedge \ldots \wedge t_m = 1 \wedge t_{m+1} \neq 1)$$

истинна в некоторой группе. Тогда конечная совокупность Σ' формул

$$t_j^{-1}x_{n+1}t_j = x_{n+1}\ (j = 0, \ldots, m); \quad x_{n+2+i}^{-1}\, x_kx_{n+2+i} = x_k\ (i, k = 0, \ldots, n);$$
$$x_{n+2+i}^{-1}\, x_{n+1}x_{n+2+i} = x_i^{-1}x_{n+1}x_i \qquad (i = 0, \ldots, n);$$
$$x_{n+2+i}x_{n+1}^{-1}\, x_{n+2+i}^{-1} = x_ix_{n+1}^{-1}\, x_i^{-1} \qquad (i = 0, \ldots, n);$$
$$x_{2n+2+l}x_l = 1 \quad (l = 0, \ldots, 2n+2); \qquad t_{m+1}^{-1}\, x_{n+1}t_{m+1} \neq x_{n+1}$$

***совместна с** T_p для $p = 0$ и для каждого простого p.*

Лемма 2 (П. Кон [31]). *Пусть $e_0, e_1, \ldots$ — произвольное перечисление элементов произвольного счетного тела K (возможно, с повторением) и $e_0 = 0$. Тогда существует тело K_1, в котором найдутся такие x, y, z, что K_1 является расширением K; x, y, z трансцендентны над простым подполем тела K_1; $e_i = y^{-i}xy^i - z^{-i}xz^i$ в K_1 для всех натуральных i.*

Лемма 3 (У. Уилер [67]; см. также [42]). *Пусть K — экзистенциально замкнутое тело и* $\mathrm{tr}\,(x)$ — *формула*

$$(\exists z_1)(\exists z_2)(xz_1 = z_1x^2 \wedge x^2z_2 = z_2x^2 \wedge xz_2 \neq z_2x \wedge z_1 \neq 0),$$

а $\mathrm{tr}\,(x,\ y)$ — *формула*

$$xy = yx \wedge (\exists z_1)(\exists z_2)(xz_1 = z_1x^2 \wedge x^2z_2 = z_2x^2 \wedge xz_2 \neq$$
$$\neq z_2x \wedge z_1 \neq 0 \wedge yz_1 = z_1y \wedge yz_2 = z_2y \wedge \mathrm{tr}(y)).$$

Тогда и только тогда $\mathrm{tr}\,(a)$ *истинно в K, когда a трансцендентен над простым подполем K_0 тела K. Тогда и только тогда* $\mathrm{tr}\,(a,\ b)$ *истинно в K, когда a и b перестановочны и алгебраически независимы над K_0.*

Лемма 4 (А. Макинтайр [47]; У. Уилер [67]). *Формула* $x \in [y]$, *равная*

$$(\forall z_1)(yz_1 = z_1y \rightarrow xz_1 = z_1x),$$

истинна в экзистенциально замкнутом теле K для a как значении x и b как значении y тогда и только тогда, когда a принадлежит подтелу, порожденному b в K.

Лемма 5 (П. Кон [33]). *Класс тел фиксированной характеристики обладает сильным свойством амальгамирования, т. е. если K_1 и K_2 — два тела с общим подтелом K_0, причем $K_1 \cap K_2 = K_0$, то существует тело K, являющееся расширением как тела K_1, так и тела K_2.*

Лемма 6 (П. Кон [33]). *Пусть K — экзистенциально замкнутое тело, K_1 — подтело, порожденное в K элементами $a_1, \ldots, a_n$, а φ — изоморфизм K_1 на подтело тела K, порожденное элементами $b_1, \ldots, b_n$, и $\varphi(a_i) = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда существует такой $t \in K$, что $t \neq 0$ и $t^{-1}a_it = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Лемма 7. *Пусть K — экзистенциально замкнутое тело, а $\Phi(x,\ y)$ — формула*

$$\mathrm{tr}\,(x) \wedge y \in [x] \wedge (\forall z_1)(\forall z_2)((\mathrm{tr}(z_1,\ z_2) \wedge x = z_1z_2) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\exists z_3)(\exists z_4)(z_3 \in [z_1] \wedge z_4 \in [z_2] \wedge y = z_3z_4)).$$

Тогда и только тогда $\Phi(a,\ b)$ истинно в K, когда $\mathrm{tr}\,(a)$, $b = ta^m$ *в K, где t принадлежит простому подполю K_0 тела K, а m — целое число.*

Доказательство. В одну сторону лемма очевидна. Если $\Phi(a,\ b)$ истинно, то существуют такие u и v в K, что $a = uv$ и $\mathrm{tr}\,(u,\ v)$. Действительно, если $K_0(u,\ v)$ — поле рациональных функций от переменных u и v над K_0, то uv трансцендентен над K_0 в $K_0(u,\ v)$. Рассмотрим изоморфизм тела, порожденного a в K, на тело $K_0(uv)$, порожденное uv в $K_0(u,\ v)$, переводящий a в uv. Отождествим $K_0(uv)$ с подтелом тела K согласно этому изоморфизму и рассмотрим общее расширение K и $K_0(u,\ v)$. В этом расширении истинна Σ_1-формула

$$(\exists z_3)(\exists z_4)(\mathrm{tr}\,(z_3,\ z_4) \wedge x = z_3z_4).$$

Значит, эта формула истинна и в K. Теперь из $\Phi(a,\ b)$ следует, что существуют такие многочлены над K_0 от одного переменного $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ h_6$, что в K

$$b = \frac{h_1(uv)}{h_2(uv)},\quad \frac{h_1(uv)}{h_2(uv)} = \frac{h_3(u)}{h_4(u)} \cdot \frac{h_5(v)}{h_6(v)},$$

а пары $\langle h_1,\ h_2\rangle$, $\langle h_3,\ h_4\rangle$, $\langle h_5,\ h_6\rangle$ являются парами взаимно простых многочленов. Если свободные члены всех этих многочленов отличны от нуля, то $b \in K_0$. Для того чтобы это доказать, надо положить u равным нулю, и получить, что h_5 и h_6 имеют нулевую степень, а потом положить v равным нулю и получить, что h_3 и h_4 имеют нулевую степень. Общий случай легко сводится к разобранному.

Лемма 8. *Существует формула $pw(x, y)$, истинная в экзистенциально замкнутом теле K для a как значении x и b как значении y тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}(a)$ и $b = ta^i$ в K, где t — отличный от нуля элемент простого подполя K_0 тела K, а i — положительное целое число.*

Доказательство. Надо следовать хорошо известной схеме. Формула

$$(\exists z_1)(\exists z_2)(\exists z_3)(z_1 \neq 0 \wedge \Phi(x, z_2) \wedge z_1^{-1}xz_1 = \\ = z_2 \wedge z_3 \neq 0 \wedge (\forall z_4)z_3z_4 = z_4z_3 \wedge z_1^{-1} z_2z_1 = z_3y)$$

истинна в K тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}(x)$ и $y = tx^m$, где t — отличный от нуля элемент K_0, а m — квадрат отличного от нуля целого числа. Используя, что каждое натуральное число является суммой четырех квадратов, теперь легко понять, что в качестве $pw(x, y)$ можно взять конъюнкцию $\mathrm{tr}(x)$ и формулы, утверждающей, что существуют такие y_1, y_2, y_3, y_4, что $y_j = t_jx^{i_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, где i_1, i_2, i_3, i_4 — целые числа, являющиеся квадратами, одно из которых, по крайней мере, отлично от нуля, а t_1, t_2, t_3, t_4 — отличные от нуля элементы K_0, и что

$$y = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4.$$

Теорема. *Теория T_p является богатой при $p = 0$ или простом p.*

Доказательство. В качестве $\theta^{T_p}(x, y, u)$ из определения почти богатой теории возьмем формулу

$$\mathrm{tr}(u_1) \wedge (\exists z_1)(\exists z_2)(\exists z_3)(\exists z_4)(\exists z_5)(pw(u_1, z_1) \wedge \\ \wedge pw(u_1, z_2) \wedge pw(u_1, u_5) \wedge u_5 = z_1z_2 \wedge z_1 \neq 0 \wedge z_2 \neq \\ \neq 0 \wedge z_3 \neq 0 \wedge z_4 \neq 0 \wedge z_5 \neq 0 \wedge z_3^{-1} u_1z_3 = u_2 \wedge z_4^{-1} u_1z_4 = \\ = u_3 \wedge z_5^{-1} u_1z_5 = u_4 \wedge x = z_1^{-1} u_6z_1 - (z_3^{-1} z_1z_3)^{-1}u_6(z_3^{-1} z_1z_3) \wedge y = \\ = (z_4^{-1} z_1z_4)^{-1}u_7(z_4^{-1} z_1z_4) - (z_5^{-1} z_1z_5)^{-1}u_7(z_5^{-1} z_1z_5)).$$

Проверим, что $\theta^{T_p}(x, y, u)$ удовлетворяет условиям б) и в) из определения почти богатой теории. Пусть $K \in Э(T)$, а $u_1, \ldots, u_7 \in K$. Рассмотрим такую пару $x, y \in K$, что $\theta^{T_p}(x, y, u_1, \ldots, u_7)$ истинно в K. Если $z_1 = tu_1^i$, где $t \in K_0$ и i — положительное целое число, то для i имеется конечное число возможностей (если $u_5 = t_1u_1^m$, где $t_1 \in K_0$ и m — положительное целое число, то $i < m$). Но

$$z_3^{-1} z_1z_3 = tu_2^i, \quad z_4^{-1}z_1z_4 = tu_3^i, \quad z_5^{-1} z_1z_5 = tu_4^i, \\ x = u_1^{-i} u_6u_1^i - u_2^{-i} u_6u_2^i, \quad y = u_3^{-i} u_7u_3^i - u_4^{-i} u_7u_4^i.$$

Таким образом, пар $\langle x, y\rangle$ таких, что $\theta^{T_p}(x, y, u)$ истинно в K, имеется не более $m - 1$.

Пусть H — конечное множество пар элементов $K \in Э(T)$,

$$H = \{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_s, b_s\rangle\}.$$

Пусть K_1 — подтело, порожденное $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ в K. Пусть K_0 — простое подполе тела K. Выберем такие трансцендентные над K_0 элементы x_1, y_1, z_1 в некотором теле K_2, расширяющем тело K_1, и трансцендентные над K_0 элементы x_2, y_2, z_2 в некотором теле K_3, расширяющем K_1, что

(1) $\quad a_i = y_1^{-i} x_1y_1^i - z_1^{-i} x_1z_1^i \qquad (i = 1, \ldots, s)$ в K_2;

(2) $\quad b_i = y_2^{-i} x_2y_2^i - z_2^{-i} x_2z_2^i \qquad (i = 1, \ldots, s)$ в K_3.

Можно считать, что $K_2 \cap K = K_1$ и $K_3 \cap K = K_1$. Так как класс тел обладает сильным свойством амальгамирования, то существуют тело K_4, являющееся общим расширением тел K_2 и K, и тело K_5, являющееся общим расширением тел K_3 и K. Система, содержащая уравнения (2) и формулы $\mathrm{tr}(y_2)$, $\mathrm{tr}(z_2)$, имеет решение в K_5, а система, содержащая уравнения (1) и формулы $\mathrm{tr}(y_1)$, $\mathrm{tr}(z_1)$, имеет решение в K_4. Из экзистенциальной замкнутости K следует, что обе эти системы имеют решение K. Значения y_1, x_1, z_1, y_2, x_2, z_2 в этом решении обозначим через u_1, u_6, u_2, u_3, u_7, u_4, а u_1^{s+1} обозначим через u_5. Так как u_1, u_2, u_3, u_4 трансцендентны над K_0, то они порождают изоморфные подтела в K. Значит, существуют отличные от нуля такие z_3, z_4 и z_5 в K, что $z_3^{-1} u_1 z_3 = u_2$, $z_4^{-1} u_1 z_4 = u_3$, $z_5^{-1} u_1 z_5 = u_4$. Взяв u_1^{s+1-i} в качестве z_2 и u_1^i в качестве z_1, получим, что $\theta^{T_p}(a_i, b_i, u_1, \ldots, u_7)$ истинно в K. Если же $\theta^{T_p}(x, y, u_1, \ldots, u_7)$ истинно в K, а z_2 есть tu_1^i, $t \in K_0$, то получаем, что $x = a_{s+1-i}$, $y = b_{s+1-i}$. Итак, T_p — почти богатая теория.

Пусть X — некоторое множество нечетных натуральных чисел. Из леммы 2 легко следует, что совокупность Σ, состоящая из формул

$$(3)\quad \begin{cases} y^{-i}xy^i - z^{-i}xz^i = 1 & (i \in X), \\ y^{-i}xy^i - z^{-i}xz^i = 0 & (i \notin X,\ i \text{ — нечетное натуральное число}), \end{cases}$$

совместна с T_p. Легко видеть, что совокупность Y всех номеров равенств (3) рекурсивно изоморфна X и рекурсивно выделяется в проблеме равенства любого тела, порожденного x, y, z, в котором выполняются все равенства из Σ. У нас есть нумерация всех термов сигнатуры теории тел, переменные которых содержатся среди x, y, z. Пусть $\Sigma_0 = \Sigma$. Если n не является номером такого терма, то пусть $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$. Если n — номер такого терма и этот терм есть t, а равенство $t = 0$ выводимо из Σ_n, то пусть

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{t = 0\},$$

если же это равенство не выводимо из Σ_n, то пусть

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{t \neq 0\}.$$

Пусть

$$\Sigma_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n.$$

Ясно, что Σ_∞ совместна с T_p. Пусть B — модель $T_p \cup \Sigma_\infty$. В B рассмотрим подтело A, порожденное x, y, z. Ясно, что проблема равенства для $(A;\ x,\ y,\ z)$ рекурсивна относительно Y'. Итак, выполняется условие а) из определения богатой теории.

Рассмотрим теперь формулу Φ, удовлетворяющую условию б) из определения богатой теории для теории групп. Пусть Φ имеет вид

$$(\exists x_0) \ldots (\exists x_n)(t_0 = 1 \wedge \ldots \wedge t_m = 1 \wedge t_{m+1} \neq 1).$$

Для этих $t_0, \ldots, t_m, t_{m+1}$ рассмотрим совокупность Σ' формул из леммы 1. Пусть K — конечно порожденное тело, в котором Σ' истинна для некоторых $x_0, \ldots, x_{4n+4}$. Легко проверяется, что тогда $x_0, \ldots, x_n$ отличны от нуля. Рассмотрим группу G, порожденную $x_0, \ldots, x_n$ в мультипликативной группе тела K. Легко следует из Σ', что те $a \in G$, для которых $ax_{n+1} = x_{n+1}a$ в K, образуют нормальную подгруппу N в G и что в фактор-группе G/N истинна Φ. Поэтому G/N имеет нерекурсивную проблему равенства. Значит, проблема равенства для K тоже нерекурсивна. Итак, выполнено и условие б) из определения богатой теории.

§ 8. Открытые вопросы

Вопрос 1. Для каждой ли почти богатой теории T элементарная теория класса $Э(T)$ не является гиперарифметической?

Вопрос 2. Для каких подклассов K класса всех систем вида $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$, где T — фиксированная почти богатая теория, n — фиксированное натуральное число, $A \in M(T)$ и $a_1, \ldots, a_n \in |A|$, верна теорема: *тогда и только тогда существует формула* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *такая, что для каждых* $A \in Э(T)$ *и* $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ *истинность* $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ *в* A *равносильна принадлежности* $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$ *к* K, *когда существует формула типа* III $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ *такая, что для каждых* $A \in M(T)$ *и* $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ *истинность* $\Psi(a_1, \ldots, a_n)$ *в* A *равносильна принадлежности* $(A;\ a_1, \ldots, a_n)$ *к* K?

Вопрос 3. Является ли теория коммутативных полугрупп почти богатой?

Вопрос 4. Имеется ли почти богатая теория, модели которой — коммутативные полугруппы?

Вопрос 5. Имеется ли почти богатая теория, модели которой — коммутативные ассоциативные кольца?

Вопрос 6. Является ли арифметика Пеано почти богатой теорией? Арифметика Пеано определяется в [17] в подстрочном примечании на с. 131.

Вопрос 7. Является ли неодноэлементная алгебраически замкнутая коммутативная полугруппа также экзистенциально замкнутой в теории коммутативных полугрупп? Аналогичный вопрос можно сформулировать также для инверсных полугрупп. Однако известно, что ответ на аналогичный вопрос для групп и полугрупп положителен, а для ассоциативных колец и коммутативных ассоциативных колец отрицателен.

Вопрос 8. Пусть T — богатая теория. Как охарактеризовать в терминах теории рекурсивных функций те гиперарифметические X, которые рекурсивно изоморфны проблемам равенства для $A' \in M_n'(T)$ с элементарно определимым в $Э(T)$ классом систем, изоморфных A'? А как охарактеризовать тьюринговы степени таких гиперарифметических X? Зависит ли совокупность всех этих X от выбора богатой теории T?

Последний круг вопросов относится к структуре алгебраически замкнутых полугрупп.

Следующее рассуждение показывает, что существуют две неизоморфные алгебраически замкнутые полугруппы континуальной мощности, которые с точностью до изоморфизма имеют одни и те же конечно порожденные подполугруппы. Аналогичное утверждение имеет место и для алгебраически замкнутых груп.

Пусть G — птакая полугруппа континуальной мощности, в которую изоморфно вкладывается каждая конечно порожденная полугруппа. Пусть c — мощность континуума. Пусть $A_0 = G$. Если α — ординал, меньший c, и A_β для $\beta < \alpha$ уже построены, то пусть $A_\alpha' = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$, A_α'' — полугруппа, расширяющая A_α', в которой есть такой e_α, что $e_\alpha x = x e_\alpha$ для всех $x \in A_\alpha'$, а A_α — алгебраически замкнутая полугруппа континуальной мощности, содержащая A_α''. Пусть $A = \bigcup\limits_{\alpha<c} A_\alpha$. Пусть $B_0 = G$. Если B_n уже построена, пусть B_{n+1}' есть свободное произведение B_n и свободной полугруппы, порожденной f_n, где $f_n \notin B_n$, а B_{n+1} — алгебраически замкнутая полугруппа континуальной мощности, содержащая B_{n+1}'.

Пусть

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Тогда для каждого счетного $C \subseteq |A|$ найдется $\alpha < c$, что $C \subseteq |A'_\alpha|$, и, значит, $e_\alpha x = x e_\alpha$ для каждого $x \in C$. Вместе с тем в B нет такого e, что $ef_n = f_n e$ для $n \in N$. Значит, A и B не являются изоморфными полугруппами.

Однако легко показать, что любые две счетные алгебраически замкнутые группы изоморфны, если для каждой конечно порожденной подгруппы одной из них найдется изоморфная подгруппа другой. (См. об этом в [46].)

Вопрос 9. Изоморфны ли любые две такие счетные алгебраически замкнутые полугруппы, что для каждой конечно порожденной подполугруппы одной из них найдется изоморфная ей подполугруппа другой?

Вопрос 10. Всякая ли алгебраически замкнутая группа вкладывается изоморфно в виде максимальной подгруппы хотя бы в одну алгебраически замкнутую полугруппу?

Вопрос 11. Как зависит мощность максимальной подгруппы алгебраически замкнутой полугруппы от мощности этой полугруппы?

Известно, что максимальная подгруппа алгебраически замкнутой полугруппы является алгебраически замкнутой группой и все максимальные подгруппы одной и той же алгебраически замкнутой полугруппы изоморфны.

Вопрос 12. Существуют ли неизоморфные счетные алгебраически замкнутые полугруппы с изоморфными максимальными подгруппами?

Известно, что когда T — теория групп, то существуют T — генерические группы, мощность которых — это первая несчетная мощность.

Вопрос 13. Пусть T — теория полугрупп. Существуют ли несчетные T-генерические полугруппы?

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Белеградек, Алгебраически замкнутые группы, Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1975.

[2] О. В. Белеградек, Об алгебраически замкнутых группах, Алгебра и логика **13**:3 (1974), 239—255.

[3] О. В. Белеградек, Об алгебраически замкнутых группах, 3 Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск, 1974, 12—14.

[4] О. В. Белеградек, Об определимости в алгебраически замкнутых группах, Матем. заметки **16**:3 (1974), 375—380.

[5] О. В. Белеградек, Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп, Fund. Math. **98**:1 (1978), 83—101.

[6] В. Я. Беляев, Об алгебраически замкнутых полугруппах, СМЖ, **18**:1 (1977), 32—39.

[7] В. Я. Беляев, М. А. Тайцлин, Об элементарных свойствах экзистенциально замкнутых систем, 4 Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Кишинев, 1976, 11.

[8] В. Я. Беляев, Элементарные типы алгебраически замкнутых полугрупп, 3 Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск, 1974, 18—19.

[9] Л. А. Бокуть, Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп. I, СМЖ 4:3 (1963), 500—517.

[10] Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин, Элементарные теории, УМН **20**:4 (1965), 37—108.

[11] А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., «Наука», 1970.

[12] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.

[13] А. Клиффорд, Г. Престон, Алгебраическая теория полугрупп, том I, М., «Мир», 1972.

[14] А. Г. Курош, Теория групп, М., «Наука», 1967.

[15] И. И. Мельник, К теории обобщенных групп, В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. 2. Саратов, 1971, 51—59.
[16] В. Л. Мурский, Изоморфная вложимость полугруппы с перечислимым множеством определяющих соотношений в конечно определенную полугруппу, Матем. заметки **1**:2 (1967), 217—224.
[17] Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972.
[18] М. А. Тайцлин, $\exists$-замкнутые коммутативные полугруппы, 3 Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск, 1974, 211—212.
[19] М. А. Тайцлин, Экзистенциально замкнутые коммутативные кольца, 3 Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск, 1974, 213—215.
[20] М. А. Тайцлин, Экзистенциально замкнутые коммутативные полугруппы, Fund. Math. **94** (1977), 231—243.
[21] М. А. Тайцлин, Экзистенциально замкнутые регулярные коммутативные полугруппы, Алгебра и логика **12**:6 (1973), 689—703.
[22] М. Ю. Трофимов, Об определимости в алгебраически замкнутых системах, Алгебра и логика **14**:3 (1975), 320—327.
[23] С. А. Чихачев, Генерические модели счетных теорий, Алгебра и логика **14**:6 (1975), 704—721.
[24] С. А. Чихачев, О генерических моделях, Алгебра и логика **14**:3 (1975), 345—353.
[25] Дж. Шенфилд, Математическая логика, М., «Наука», 1975.
[26] J. Barwise, A. Robinson, Completing theories by forcing, Annals of math. logic **2**:2 (1970), 119—142.
[27] M. Boffa, Corps λ-clos, C.r. Acad. sci. Paris **275**:19 (1972), A881—A882.
[28] M. Boffa, Modèles universels homogènes et modèles génèriques, C.r. Acad. sci. Paris **274**:9 (1972), A693—A694.
[29] M. Boffa, Structures extensionnelles génériques, Bull. Soc. math. Belg. **25**:1 (1973), 3—10.
[30] M. Boffa, P. van Praag, Sur les corps génériques, C.r. Acad. sci. Paris **274**:18 (1972), A1325—A1327.
[31] P. M. Cohn, Free products of skew fields, J. Austral. Math. Soc. **16**:3 (1973), 300—308.
[32] P. M. Cohn, Presentations of skew fields. I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77**:1 (1975), 7—19.
[33] P. M. Cohn, The embedding of firs in skew fields, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **23**:2 (1971), 193—213.
[34] R. Cusin, L'algèbre des formules d'une théorie complète et « forcing-compagnon», C.r. Acad. sci. Paris **275**:25 (1972), A1269-A1272.
[35] R. Cusin, Recherche du « forcing-compagnon » et du « modèlecompagnon » d'une théorie, liée à l'existence de modèles $\aleph_\alpha$-universels, C.r. Acad. sci. Paris **273**:21 (1971), A956—A959.
[36] R. Cusin, Sur les structures génériques en théorie des modèles, Rew Roum. math. pures et appl. **18**:4 (1973), 519—541.
[37] R. Cusin, The number of countable generic models for finite forcing, Fund. Math. **84**:3 (1974), 265—270.
[38] E. R. Fischer, A. Robinson, Inductive theories and their forcing companions, Isr. J. Math. **12**:2 (1972), 95—107.
[39] T. E. Hall, Free products with amalgamation of inverse semigroups, Algebra **34**:3 (1975), 373—385.
[40] P. Henrard, Le « forcing-compagnon » sans « forcing », C.r. Acad. sci. Paris **276**:12 (1973), A821—A822.

[41] G. H i g m a n, Subgroups of finitely presented groups, Proc. Roy. Soc. London A262 (1961), 455—475.

[42] J. H i r s c h f e l d, Z. H. W h e e l e r, Forcing, arithmetic, division rings, Lect. Notes Math. 454 (1975).

[43] J.-C. L a b l a n q u i e, Quelques propriétés des énoncés universellement forcés, Z. Math. Log. und Grundl. Math. 20:1 (1974), 31—36.

[44] A. M a c i n t y r e, Martin's axiom applied to existentially closed groups, Math. Scand. 32:1 (1973), 46—56.

[45] A. M a c i n t y r e, Omitting quantifier-free types in generic structures, J. Symb. Logic 37:3 (1972), 512—520.

[46] A. M a c i n t y r e, On algebraically closed groups, Ann. of Math., 96:1 (1972), 53—97.

[47] A. M a c i n t y r e, On algebraically closed division rings (preprint).

[48] A. M a c i n t y r e, The word problem for division rings, J. Symb. Logic 38:3 (1973), 428—436.

[49] B. H. N e u m a n n, Algebraically closed semigroups, Studies in pure math., New York, Acad. press, 1971, 185—194.

[50] B. H. N u e m a n n, A note on algebraically closed groups, J. London Math. Soc. 27:2 (1952), 247—249.

[51] B. H. N e u m a n n, Some remarks on cancellative semigroups, Math. Z. 117:1—4 (1970), 97—111.

[52] B. H. N e u m a n n, The isomorphism problem for algebraically closed groups, Word problems, Amsterdam — London, North-Holland, 1973, 553—562.

[53] A. R o b i n s o n, Forcing in model theory, Symp. Math. 5 (1970), 69—82.

[54] A. R o b i n s o n, Forcing in model theory, Actes Congr. int. mathématiciens 1970, v. 1, Paris, 1971, 245—250.

[55] A. R o b i n s o n, Infinite forcing in model theory, Proc. Second Scand. Logic Symp. 1970, Amsterdam — London, North-Holland, 1971, 317—340.

[56] A. R o b i n s o n, On the notion of algebraic closedness for noncommutative groups and fields, J. Symb. Logic 36:3 (1971), 441—444.

[57] G. S. S a c e r d o t e, Infinite coforcing in model theory, Adv. Math. 17:3 (1975), 261—280.

[58] W. R. S c o t t, Algebraically closed groups, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 118—121.

[59] S. S h e l a h, A note on model complete models and generic models, Proc. Amer. Math. Soc. 34:2 (1972), 509—514.

[60] G. C h e r l i n, Algebraically closed commutative rings, J. Symb. Logic 38:3 (1973), 493—499.

[61] H. S i m m o n s, Existentially closed structures, J. Symb. Logic 37:2 (1972), 293—310.

[62] H. S i m m o n s, Le nombre de structures génériques d'une théorie, C.R. Acad. Sci. Paris 277:12 (1973), A487—A489.

[63] H. S i m m o n s, Une construction du «forcing-compagnon» d'une théorie, C.R. Acad. Sci. Paris 277:13 (1973), A563—A566.

[64] S. S u b b i a h, Another proof of theorem of Evans, Semigroup Fourum 6:1 (1973), 93—94.

[65] C. W o o d, Forcing for infinitary languages, Z. Math. Logik und Grundl. Math. 18:5 (1972), 385—402.

[66] W. H. W h e e l e r, Algebraically closed division rings, forcing and analitic hierarchy, Diss. abstr. Intern. 33:7 (1973), 3209-B.

[67] W. H. W h e e l e r, Algebraically closed division rings, forcing and analytical hierarchy, Ph. D. thesis, Yaly University, 1972.

[68] M. Y a s u h a r a, The generic structures as a variety, Bull. Acad. pol. sci., Sér sci. math., astron. et phys. 20:8 (1972), 609—614.

[69] M. A. T a i t s l i n, Existentially-closed structures, 5 Intern. congress of logic, methodology and philosophy of science, Contributed papers, London (Ontario, Canada), 1975, 11—21—11—22.
[70] M. B o f f a, A note on existentially complete division rings, Lect. Notes Math. **498** (1975), 56—59.
[71] M. B o f f a, P. v a n P r a a g, Sur les sous-champs maximaux des corps génériques dénombrables, C.R. Acad. Sci. Paris **275**:20 (1972), A945—A947.
[72] R. C u s i n, Sur le «forcing» en théorie des modèles, C.R. Acad. Sci. Paris **272**:13 (1971), A845—A848.
[73] R. C u s i n, J. R. P a b i o n, Structures génériques associées à une classe de théories, C.R. Acad. Sci. Paris **272**:25 (1971), A1620—A1623.
[74] P. H e n r a r d, Une théorie sans modèle générique, C.R. Acad. Sci. Paris **272**:4 (1971), A293—A294.

Поступила в редакцию 10 мая 1976 г.